Formulaire du cours

1. Changement de repère, dérivation

- Soit $\vec{X}$ un vecteur mobile dans un repère $\mathcal{R}$, lui-même mobile par rapport à un autre repère $\mathcal{R}_0$:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{X}$$

- Soit $\mathcal{R}_0$ un repère fixe, $\mathcal{R}$ un repère mobile et M un point quelconque.
  – Formule de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}_{\text{Vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{V}(M/\mathcal{R})}_{\text{Vitesse relative}} + \underbrace{\vec{V}(M,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)}_{\text{Vitesse d'entrainement}}$$

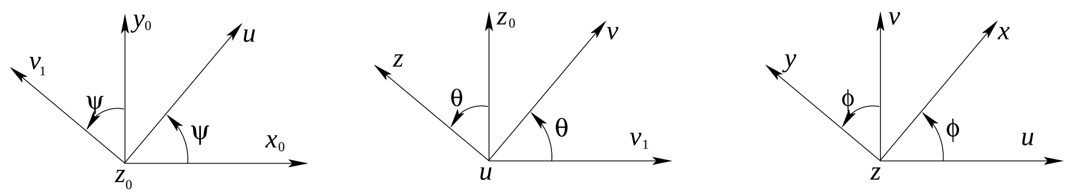
  avec :

$$\vec{V}(M,R/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}$$

  où O est l'origine de $\mathcal{R}$
  – Formule de composition des accélérations :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)}_{\text{accél. abs.}} &= \underbrace{\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})}_{\text{accél. rel.}} \\
&+ \underbrace{\vec{\Gamma}(O/\mathcal{R}_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}\right]}_{\text{accélération d'entrainement}} \\
&+ \underbrace{2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})}_{\text{accélération de Coriolis}}
\end{aligned}$$

- Définition des angles d'Euler :



$$\begin{pmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z}_0]{\text{rotation } \psi} \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}_1\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}_1\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autour de } \vec{u}]{\text{rotation } \theta} \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{z}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{z}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z}]{\text{rotation } \phi} \begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\\ \vec{z}\end{pmatrix}$$

La vitesse de rotation :

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) &= \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\phi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{z} \\
&= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\vec{x}_0 + (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\vec{y}_0 + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{z}_0 \\
&= (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi)\vec{x} - (\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi)\vec{y} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{z}
\end{aligned}$$

2. Torseur

- Un torseur permet de représenter un champ de vecteurs sur un solide (S) :

$$\mathcal{T}(A,S) = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \end{bmatrix}_A$$

$\vec{R}$ est la résultante du torseur et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ son moment en A. Le moment d'un torseur se transforme suivant la loi :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \quad \text{donc} \quad (\overrightarrow{\mathcal{M}}_B - \overrightarrow{\mathcal{M}}_A) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

- Le torseur cinématique d'un solide S est :

$$\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \\ \vec{V}(A, S/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_A$$

où $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ est la vitesse de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}_0$ et $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$ la vitesse d'un point A de S rapport à $\mathcal{R}_0$.

3. Modélisation des efforts

- Soit S_1 et S_2 deux solides en contact au point I. On appelle vitesse de glissement au point I de S_1 par rapport S_2 :

$$\vec{V}(I, S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I \in S_2/\mathcal{R})$$

Il y a roulement sans glissement de S_1 sur S_2 si la vitesse de glissement est nulle.

- Le contact ponctuel en un point A est représenté par le torseur :

$$\begin{bmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Si le contact se fait sans frottement alors :

$$\vec{R} \cdot \vec{V}(I, S_1/S_2) = 0$$

- Une liaison entre S_1 et S_2 est sans frottement, si dans tout mouvement compatible avec la liaison :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}(S_1 \to S_2) + \mathcal{P}(S_2 \to S_1) = 0$$

En particulier :

liaison sphérique de centre O	liaison rotoïde d'axe $O\vec{z}$	liaison verrou d'axe $O\vec{z}$	liaison glissière d'axe $O\vec{z}$ d'axe $O\vec{z}$
$\vec{R}$: qcq $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$	$\vec{R}$: qcq $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{z} = 0$	$\vec{R} \cdot \vec{z} = 0$ $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{z} = 0$	$\vec{R} \cdot \vec{z} = 0$ $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$: qcq

4. Cinétique

Soit G le centre d'inertie d'un solide S de masse m.

- **Tenseur d'inertie :**

$$\mathfrak{I}(A,S) = \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

Dans le repère principal d'inertie (repère respectant les symétries matérielles du solide), le tenseur est représenté par une matrice diagonale.

Théorème de Kœnig :

$$\mathfrak{I}(O,S) = \mathfrak{I}(G,S) + \mathfrak{I}(O, G(m))$$

- **Torseur cinétique :**

$$\begin{bmatrix} m\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_A$$

où $\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0)$ est le moment cinétique au point A du solide S dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.
Théorème de Kœnig (A est un point quelconque)

$$\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Si le système se réduit à un point P :

$$\vec{\sigma}(A, P/\mathcal{R}_0) = m\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$$

Si le point A est fixe ou le centre d'inertie G :

$$\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) = \mathfrak{I}(A, S) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \qquad \text{ou} \qquad \vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = \mathfrak{I}(G, S) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

- **Torseur dynamique :**

$$\begin{bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_A$$

avec :

$$\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + m\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Si le point A est fixe :

$$\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

Au point G :

$$\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

5. Lois fondamentales de la dynamique

- Principe fondamental de la dynamique :

$$\text{torseur dynamique } = \text{torseur des efforts extérieurs}$$

- Théorème du centre d'inertie (ou du centre de masse) :

$$m\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) = \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext}$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{\mathcal{F}}_{ext}}(A)$$

- Loi de l'action et de la réaction. Soit deux système Σ_1 et Σ_2, alors :

$$\{\Sigma_1 \to \Sigma_2\} = -\{\Sigma_2 \to \Sigma_1\}$$

6. Aspects énergétiques

- Énergie cinétique :

$$2T(S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \cdot \mathfrak{I}(G,S) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + mV^2(G/\mathcal{R}_0)$$

Si le système se réduit à un point :

$$2T(S/\mathcal{R}_0) = mV^2(G/\mathcal{R}_0)$$

Si le point O appartenant à S est fixe :

$$2T(S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \cdot \mathfrak{I}(O,S) \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

- Puissance d'une force agissant en A sur le solide S :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \end{bmatrix}_A \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \\ \vec{V}(A,S/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_A = \vec{R} \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

- Théorème de l'énergie cinétique d'un système Σ :

$$\frac{dT(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i$$

Si toutes les forces dérivent d'une fonction scalaire U, c'est à dire si :

$$\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i = -\frac{dU}{dt}$$

alors le théorème de l'énergie cinétique se ramène à l'intégrale première de l'énergie cinétique :

$$T + U = \text{cste}$$

7. Equations de Lagrange

Soit Q_i la force généralisée conjuguée des coordonées généralisées q_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ et T l'énergie cinétique du système de n libertés, les équations de Lagrange du système s'écrivent comme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

La puissance virtuelle :

$$\mathcal{P}^* = [\mathscr{F}][\mathscr{V}^*] = \Sigma Q_i \dot{q}_i^*$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}$$

S'il existe une fonction $V(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$ telle que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}$$

on aura l'intégrale première dite intégrale de Painlevé [1]

$$T_2 - T_0 = V + Cte$$

où $\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i$ est la puissance totale du système.

1. T_k indique la partie de l'énergie cinétique en fonction de $\dot{q}_i$ de degré i. $T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i\dot{q}_i$ et $T_0 = C$.