

# Métrologie diphasique

# Métrologie des particules

## Partie 3: Techniques de mesure

---

*Kuan Fang REN*

**UMR 6614/ CORIA**  
**CNRS - INSA et Université de Rouen**



# Technique de mesure

---

- **Mesure des particules individuelles**
  - LDV et PDA
  - Arc-en-ciel
  - Imagerie
- **Mesure des nuages de particules**
  - Turbidimétrie
  - Réfractomètre (Malvern)
  - Arc-en-ciel global

# Techniques de mesure

## Techniques et paramètres mesurés

	Détecteur		Particules		Paramètres mesurés					
	Points	CCD	Individuelles	Nuage	V	D	C	T/m	x, y, z	Time
LDV	X		X		X		?		X	y
PDA	X		X		X	X	difficile	possible	X	y
Arc-en-ciel		X	X			X		X	?	?
Arc-en-ciel globale		X		X		X		X	?	?
Turbidimétrie		X		X		X	X	?		Y
PIV		X		X	X					Fixe

V : vitesse

D : diamètre

C : concentration

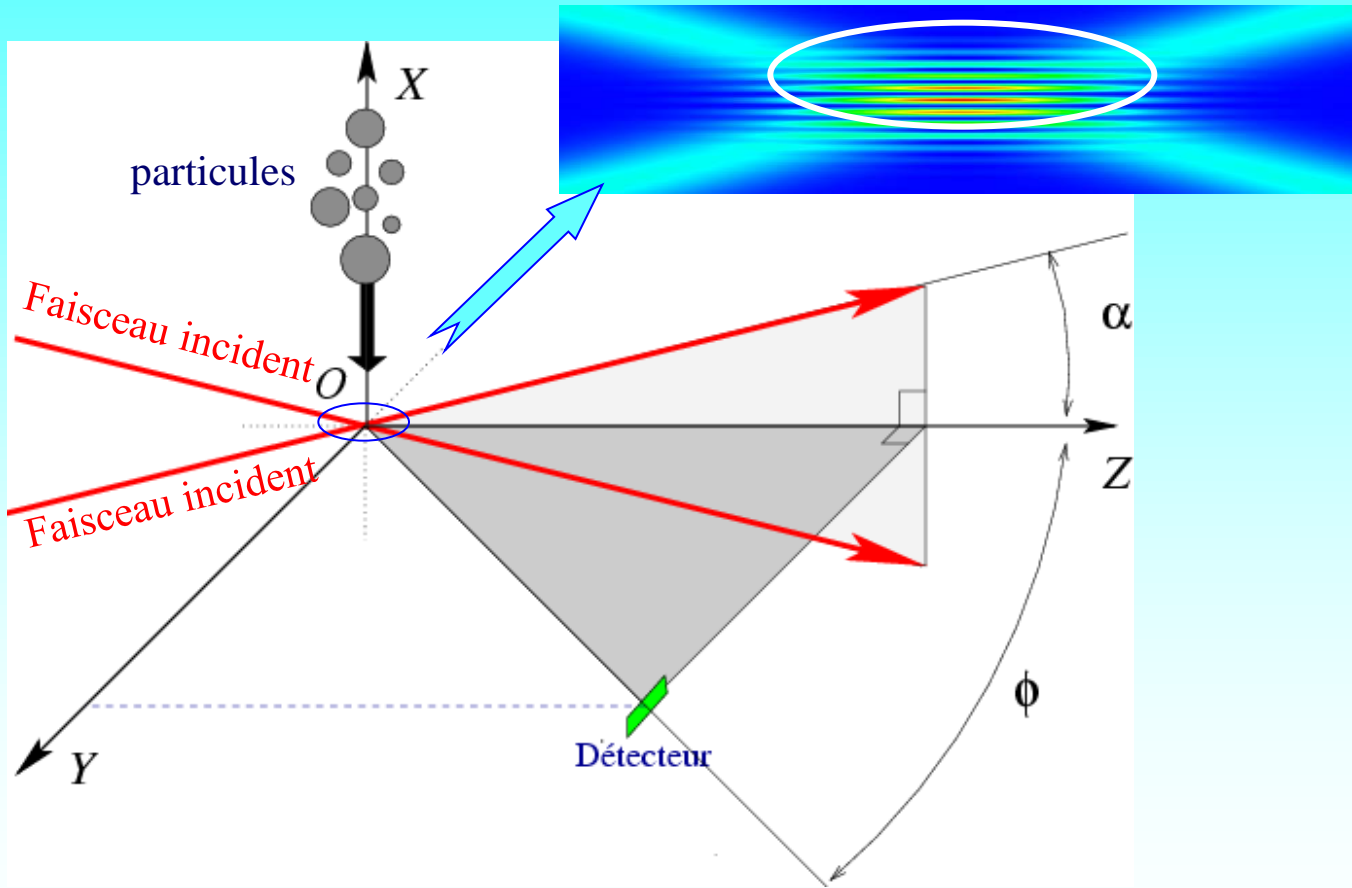
T/m : température ou indice de réfraction

x,y,z : positions des particules

Time : évolution temporelle

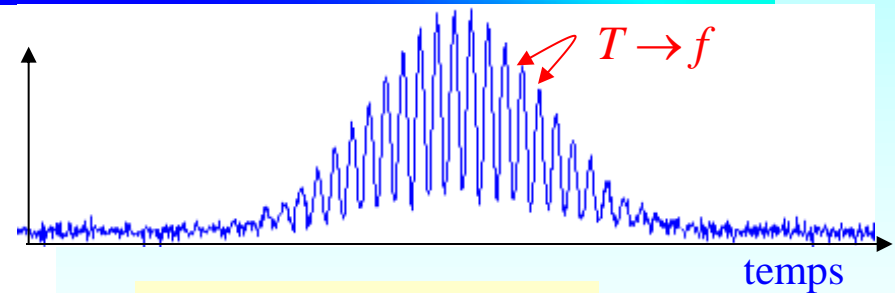
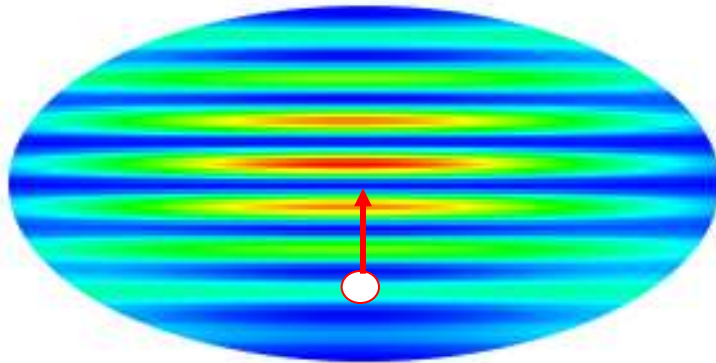
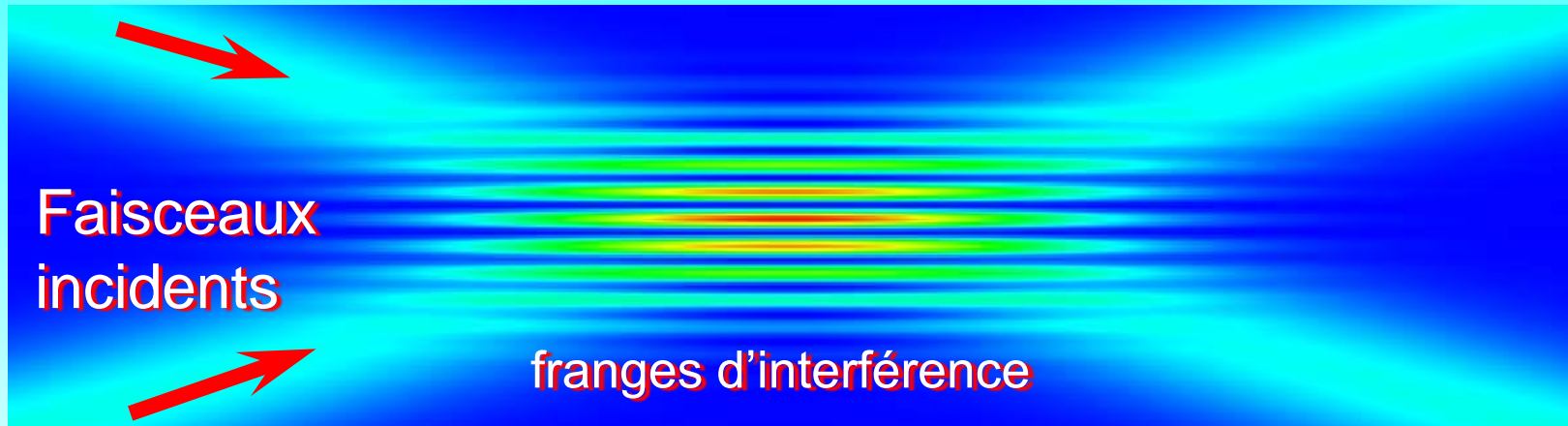
# LDV - Laser Doppler Velocimetry

## Configuration



# LDV - Laser Doppler Velocimetry

## Principe de mesure



Mesure de vitesse :

$$\delta_f = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad v_x = \frac{f \lambda}{2 \sin \alpha}$$

# LDV - Laser Doppler Velocimetry

## Principe de mesure

### Demonstration of the fringe :

$$E_1 = E_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} = E_0 e^{ik_z z + ik_x x}$$

$$E_2 = E_0 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} = E_0 e^{ik_z z - ik_x x}$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 (e^{ik_z z - ik_x x} + e^{ik_z z + ik_x x}) = 2E_0 e^{ik_z z} \cos(k_x x)$$

$$I = 4E_0^2 \cos^2(k_x x)$$

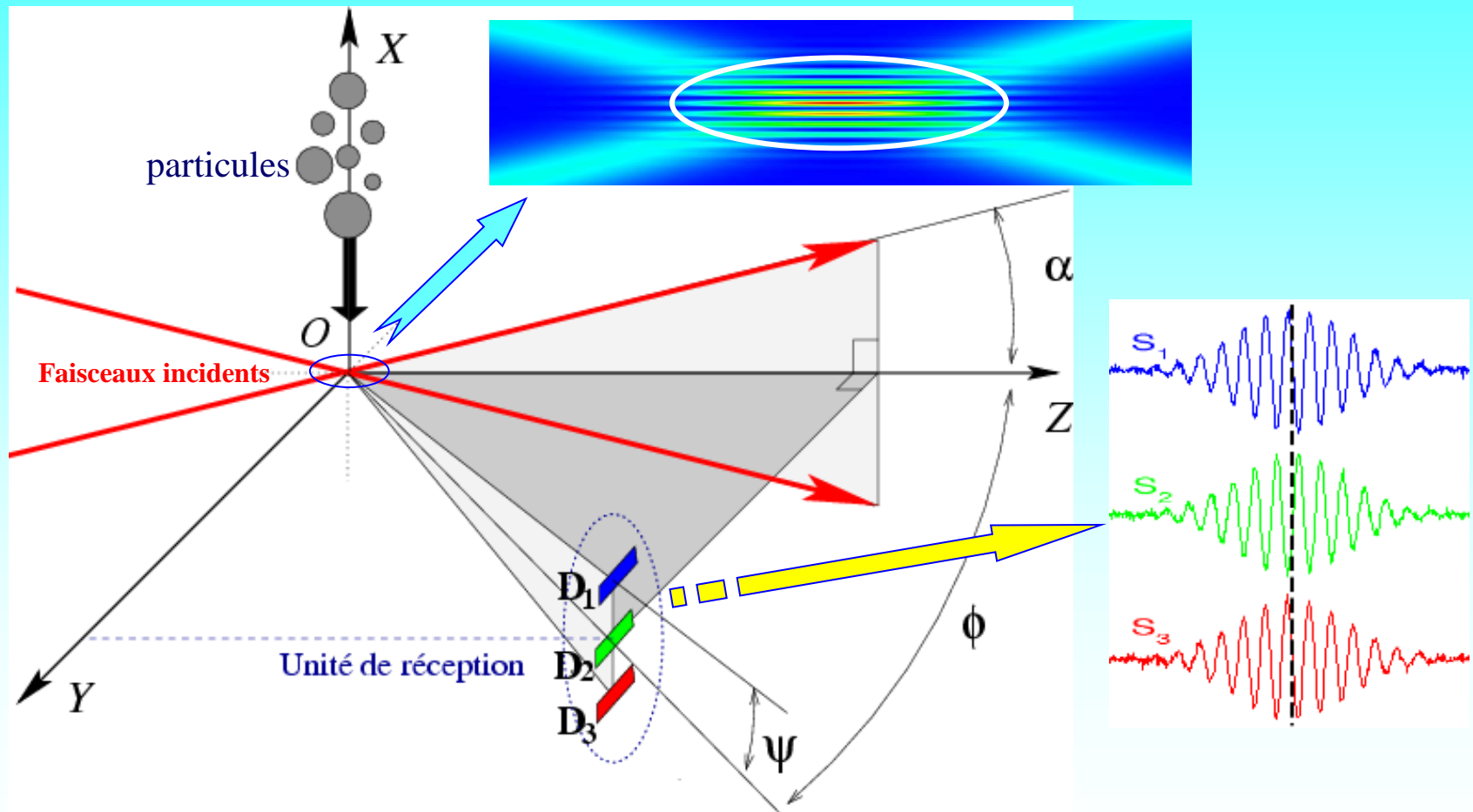
The intensity is maximum:

$$k_x x = k \sin \alpha x = p\pi \quad x_p = \frac{p\pi}{k \sin \alpha} = \frac{\lambda p}{2 \sin \alpha}$$

$$\delta_f = x_p - x_{p-1} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad v_x = \frac{f \lambda}{2 \sin \alpha}$$

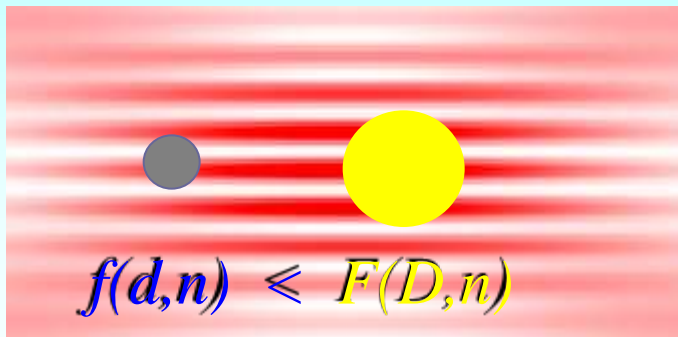
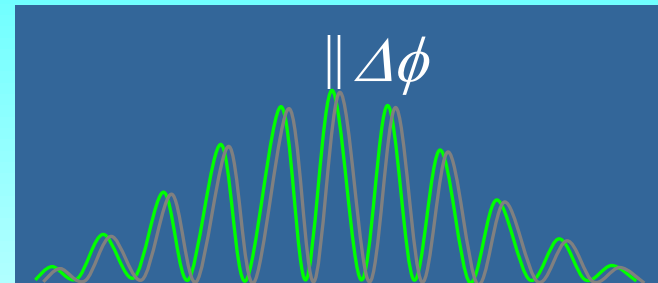
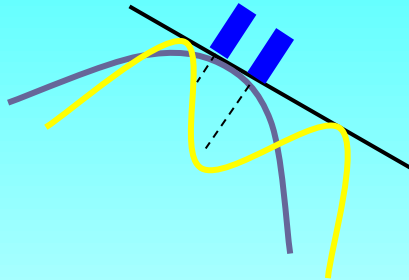
# PDA - Phase Doppler Anemometry

## Principe de mesure

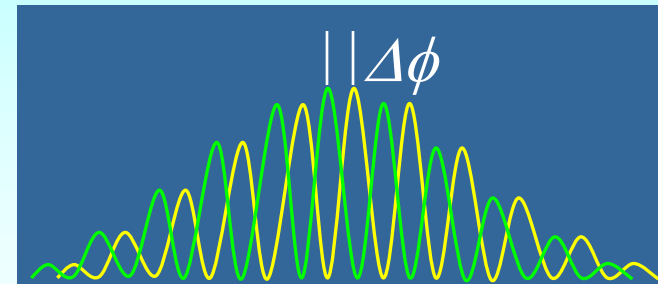


# PDA – Modèle franges

## Principe de mesure



Volume de mesure





# PDA – Modèle optique géométrique

## Principe de mesure

Relations phase-diamètre:

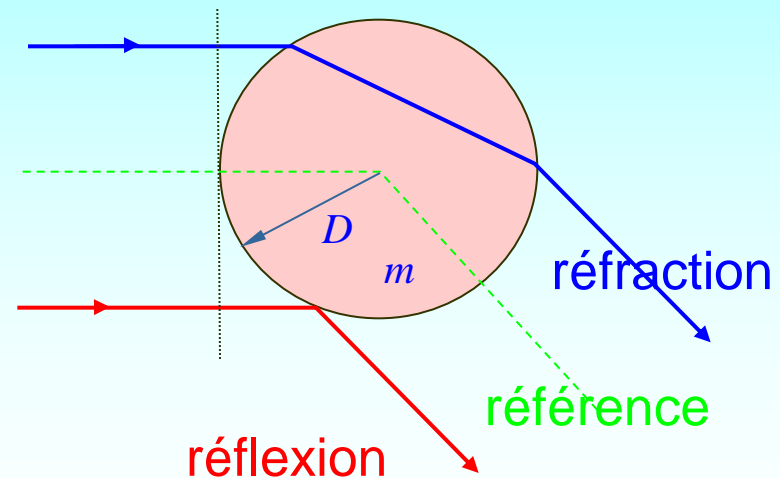
$$\varphi_0^i = \frac{2\pi \sin \alpha \sin \psi^i}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha \cos \psi^i \cos \phi^i)}} \frac{D}{\lambda} + \varphi_0$$

$$\varphi_1^i = \frac{-2\pi m \sin \alpha \sin \psi^i}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha \cos \psi^i \cos \phi^i)[1 + m^2 - m\sqrt{1 - \cos \alpha \cos \psi^i \cos \phi^i}]} \frac{D}{\lambda}$$

Relation déphasage-diamètre:

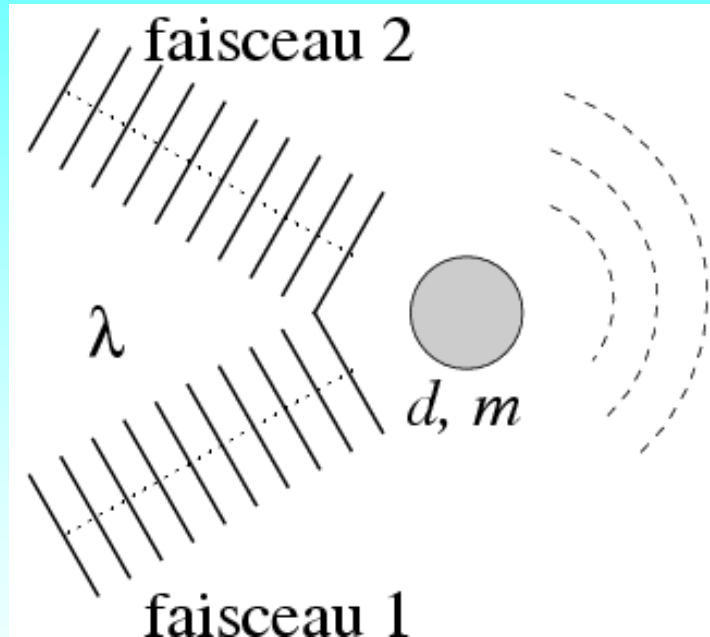
$$\Delta\varphi_{\text{refl}} = \varphi_{\text{refl}}^2 - \varphi_{\text{refl}}^1 = C_{\text{refl}} D$$

$$\Delta\varphi_{\text{refr}} = \varphi_{\text{refr}}^2 - \varphi_{\text{refr}}^1 = C_{\text{refr}}(m) D$$



# PDA – modèle des ondes

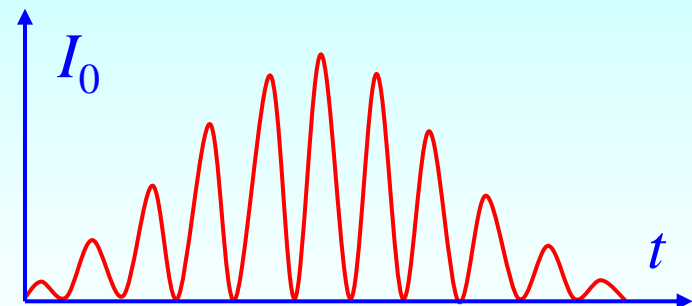
## Principe de mesure



## Simulation rigoureuse

$$E_s = E_1(d, m, \lambda, \alpha) + E_2(d, m, \lambda, \alpha)$$

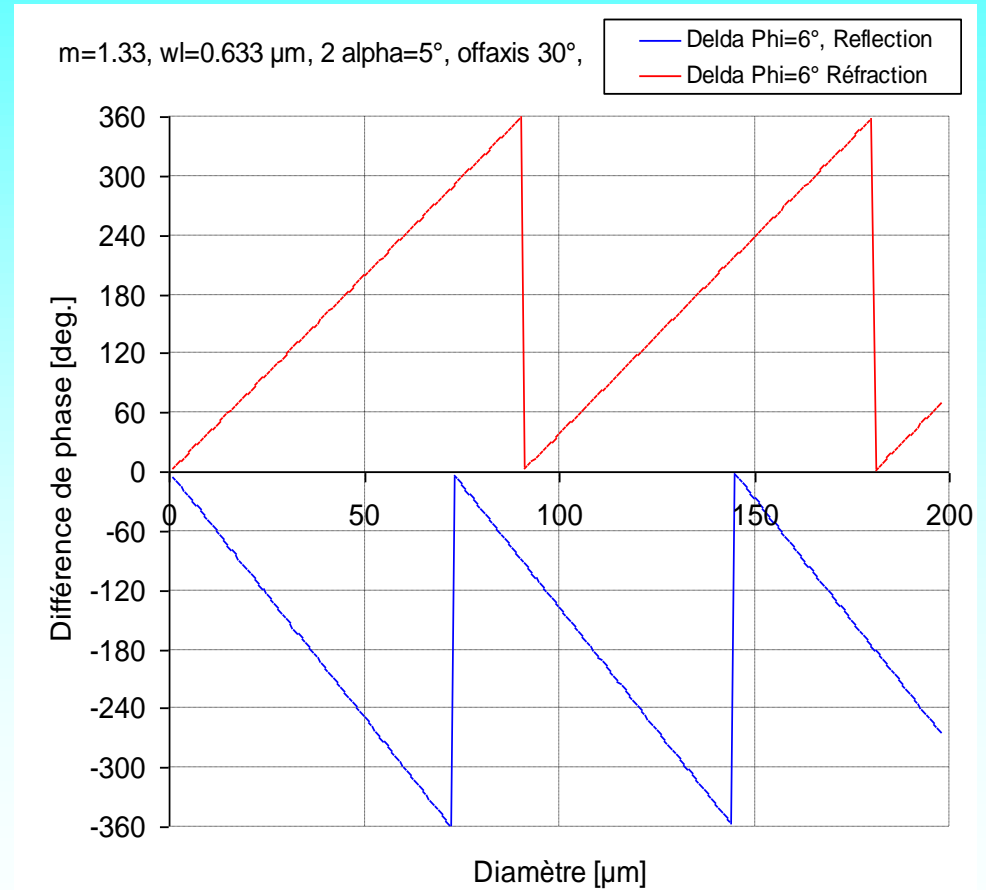
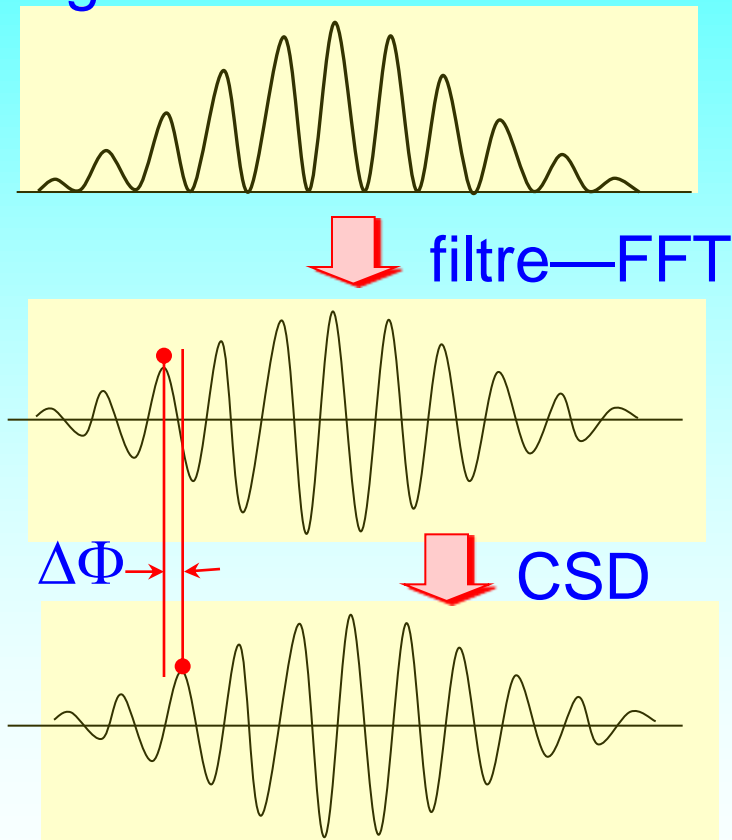
$$I = I_0 [1 + V \cos(2\pi\nu t + \phi)]$$



# PDA - Traitement du signal

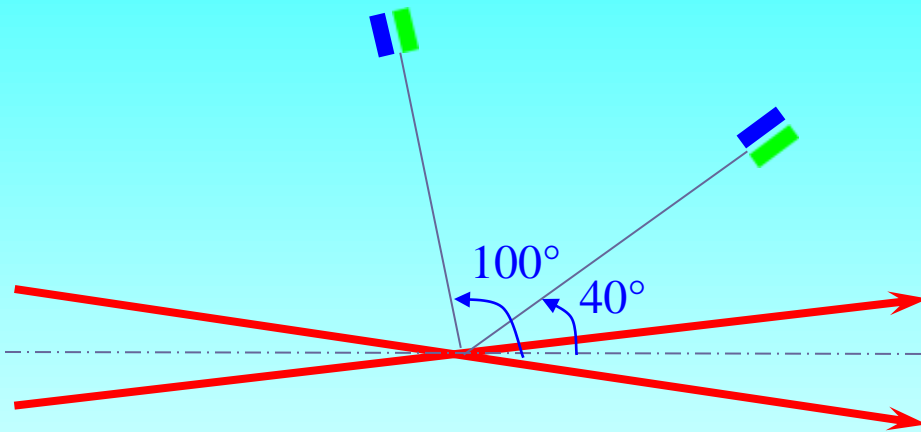
## Principe de mesure

### Signal PDA



# PDA – Effet de trajectoire

## Effet de mode de diffusion

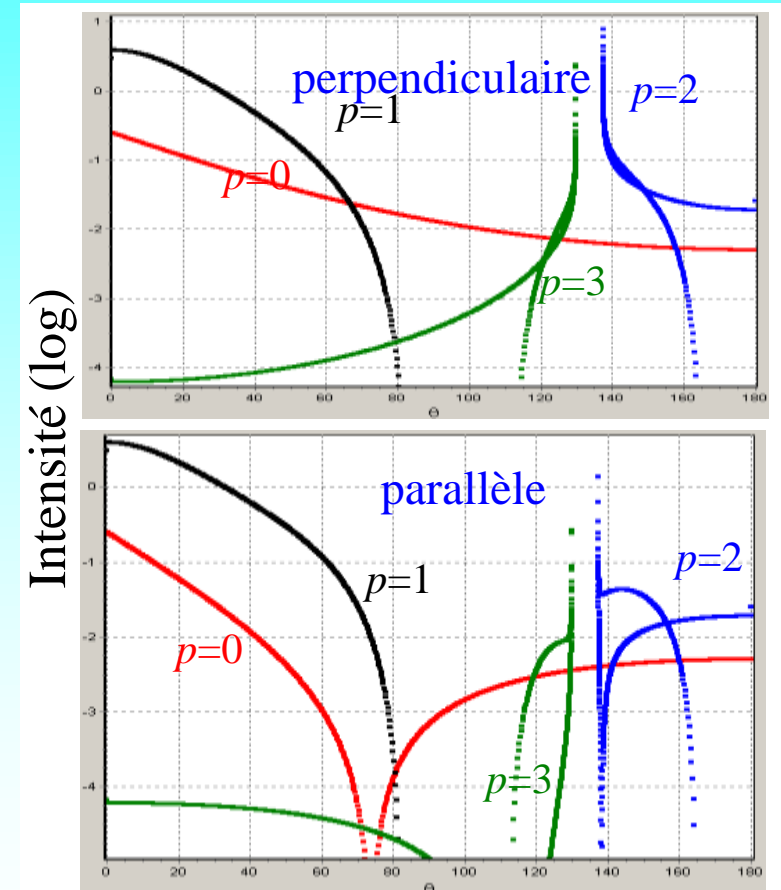


Réflexion dominante

$$\Delta\varphi_{\text{refl}} = C_{\text{refl}} D$$

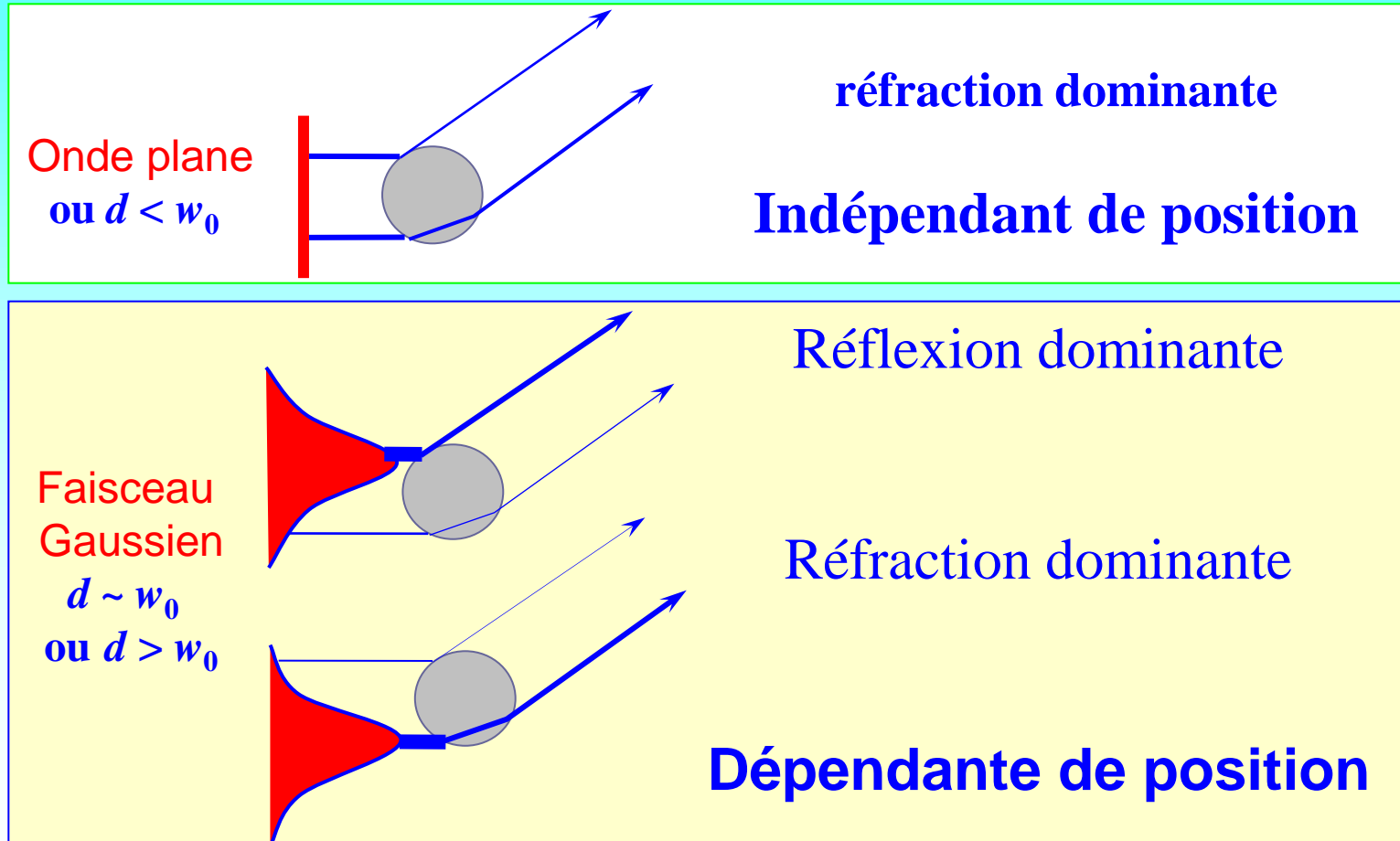
ou réfraction dominante

$$\Delta\varphi_{\text{refr}} = C_{\text{refr}}(m) D$$



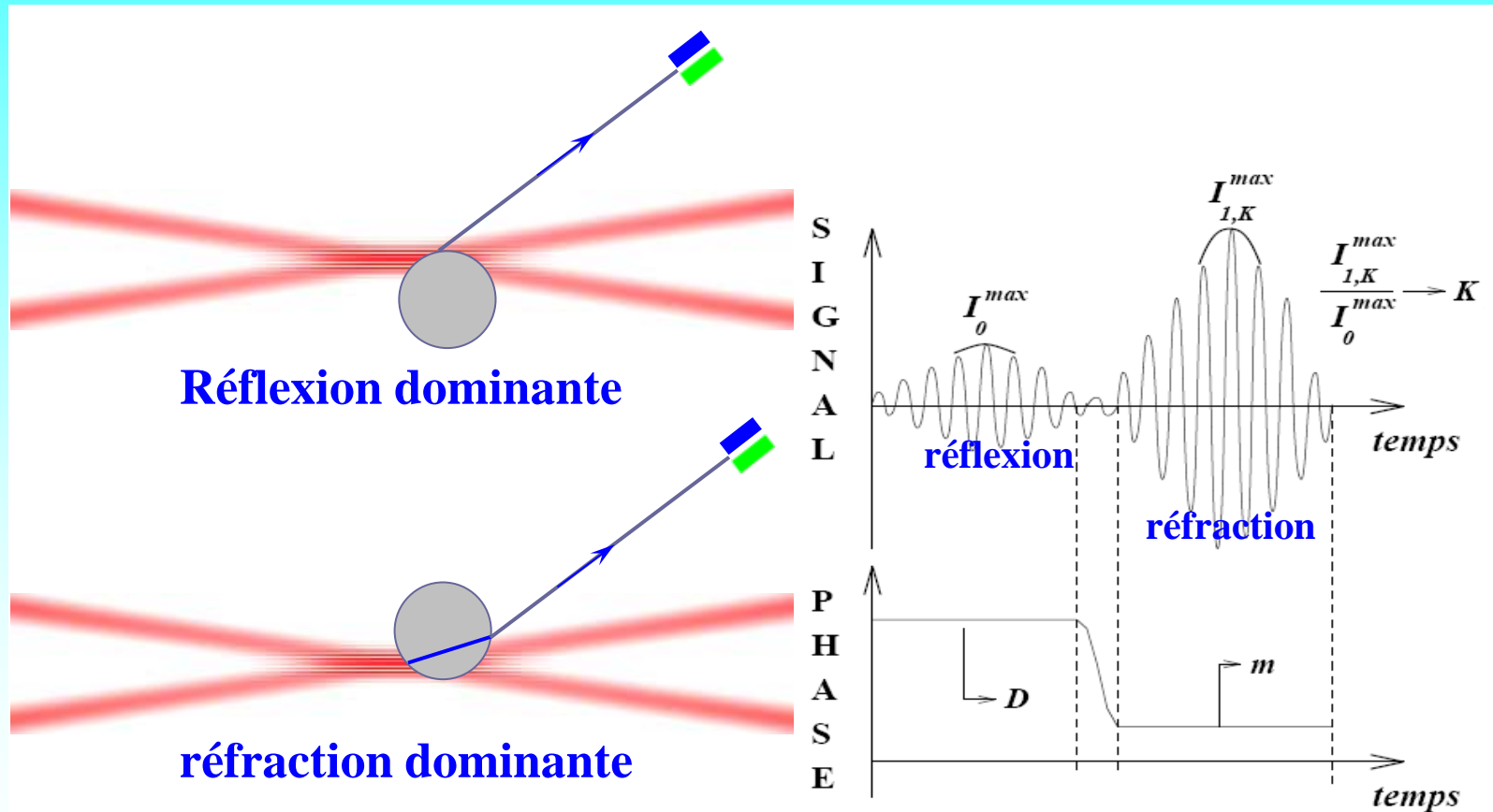
# PDA – Effet de trajectoire

## Effet de trajectoire



# PDA – Effet de trajectoire

## Effet de trajectoire



# ADL et PDA

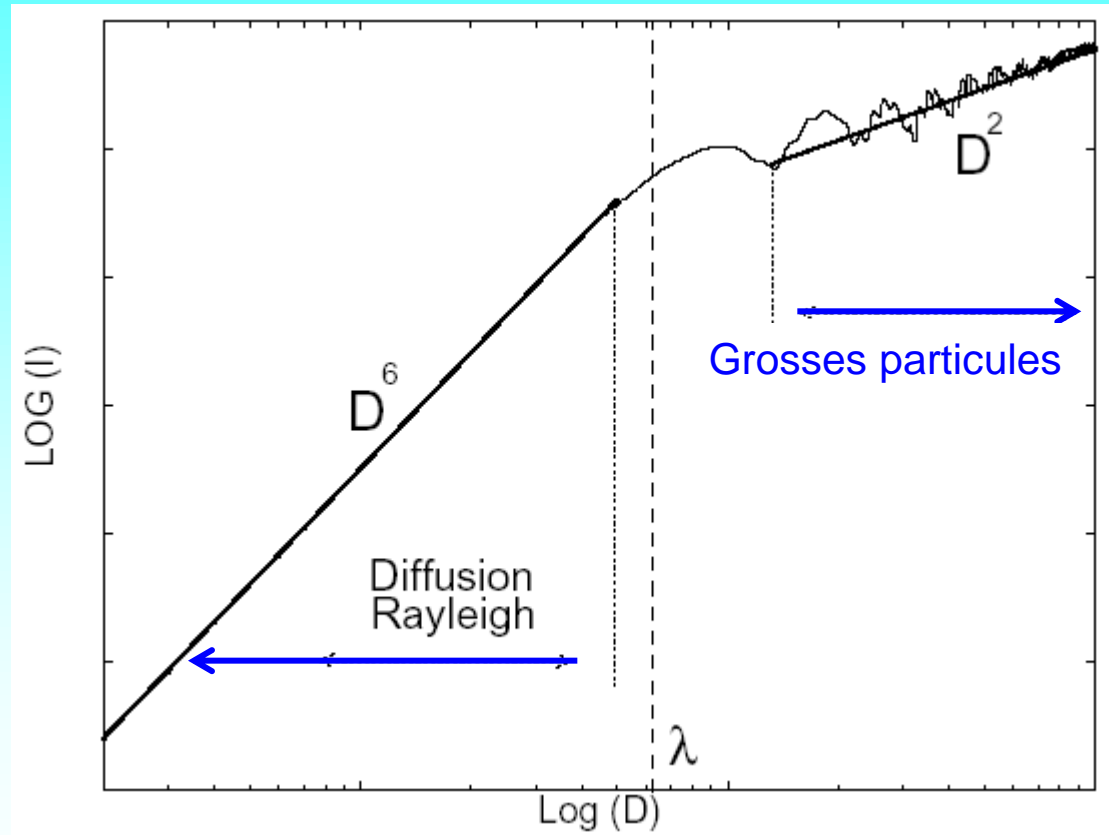
## Dynamique de mesure

Pour les petites particules  
(diffusion de Rayleigh):

$$I \propto D^6 \rightarrow \log(I) \propto 6 \log(D)$$

Pour les grosses particules:

$$I \propto D \rightarrow \log(I) \propto \log(D)$$



# Arc-en-ciel

Un phénomène naturel





# Arc-en-ciel – optique géométrique

## Modèle OG de l'arc-en-ciel

### Optique géométrique:

$$\theta_0 = \pi - 2i, \quad \theta_1 = -2(i - i')$$

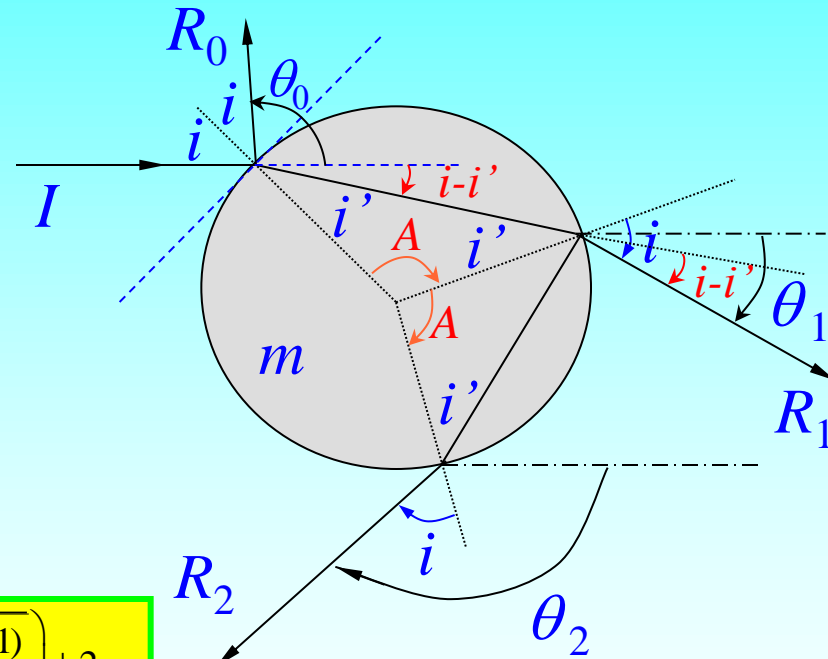
$$\theta_p = 2\tau - 2p\tau' = 2pi' - 2i - (p-1)\pi$$

$$\frac{d\theta_p}{di} = 2p \frac{di'}{di} - 2 = 0$$

$$\theta_p^{go} = 2p \cos^{-1} \left( \frac{p \cos i}{m} \right) - 2i \pm 2\pi q$$

$$\text{avec } \sin i = \sqrt{\frac{p^2 - m^2}{p^2 - 1}}$$

$$\theta_p^{go} = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{m^2 - 1}{p^2 - m^2}} \right) - 2p \arctan \left( \sqrt{\frac{p^2(m^2 - 1)}{p^2 - m^2}} \right) \pm 2\pi q$$



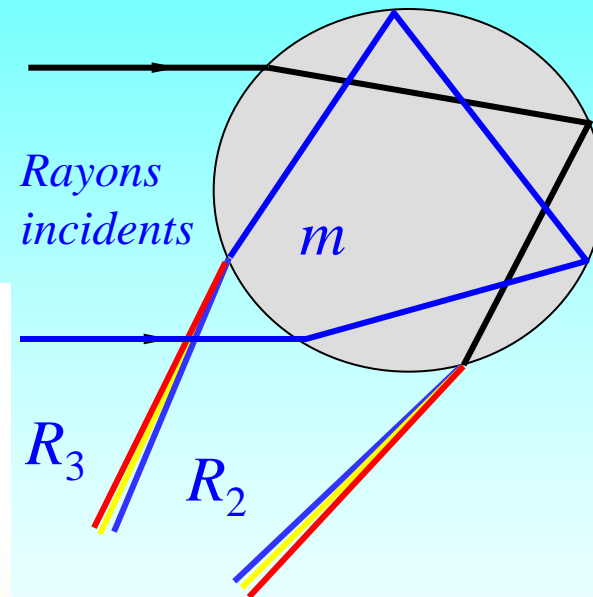
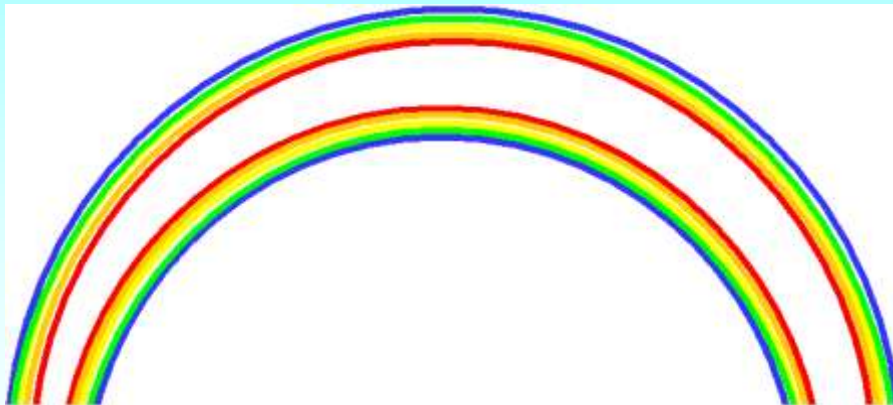
Arc-en-ciel du 1<sup>er</sup> ordre :  $p=2$

Arc-en-ciel du 2<sup>e</sup> ordre :  $p=3$

# Arc-en-ciel – optique géométrique

## Modèle OG de l'arc-en-ciel

$\lambda$	$n$	$\theta_2$	$\theta_3$
486.1	1.3371	138.5°	128.0°
589.3	1.3330	137.9°	129.1°
656.3	1.3311	137.6°	129.6°



# Arc-en-ciel – théorie d'Airy

## Théorie d'Airy de l'arc-en-ciel

Théorie d'Airy:

$$\theta_{Airy,i}(m,d)$$

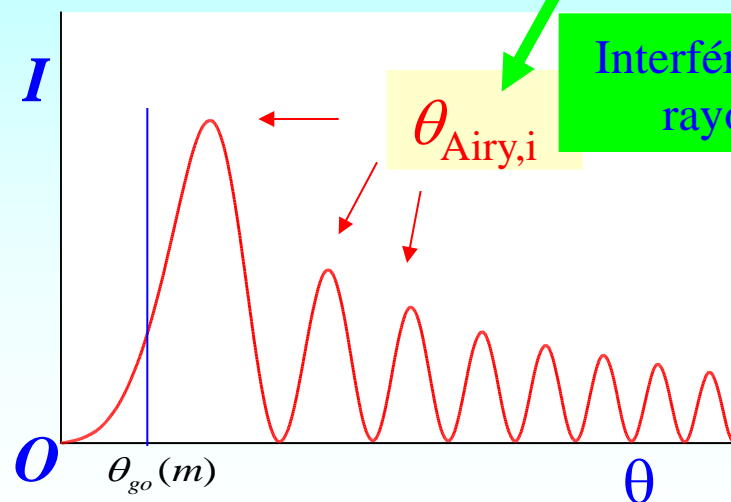
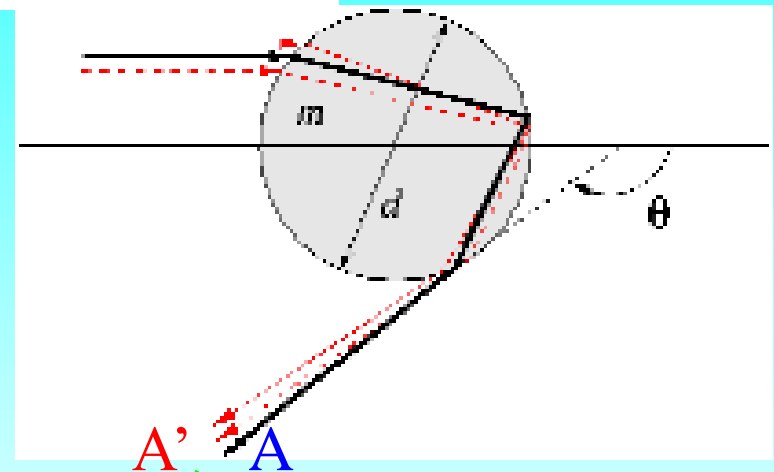
$$|\theta_{Airy,1} - \theta_{go}(p,m)| = 1.087376 \left( \frac{\pi^2}{12\alpha^2} H \right)^{1/3}$$

$$|\theta_{Airy,K} - \theta_{go}(p,m)| = \left[ \frac{9\pi^2}{4\alpha^2} \left( K - \frac{1}{4} \right)^2 H \right]^{1/3}$$

$$H = \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} \left[ \frac{p^2 - m^2}{(m^2 - 1)^3} \right]^{1/2}$$

$A_i$ : constantes

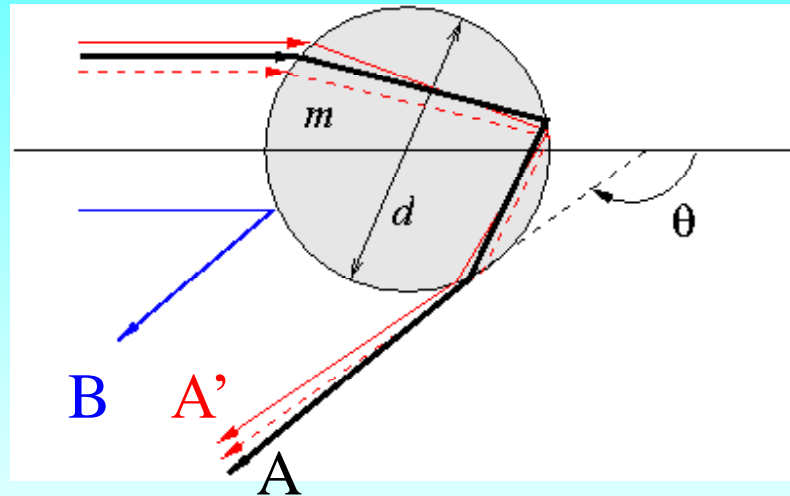
Ref: Wang & van de Hulst  
*Appl. Opt.* 30(1):106-117 (1991).



Mesure de  
 $m$  et  $d$

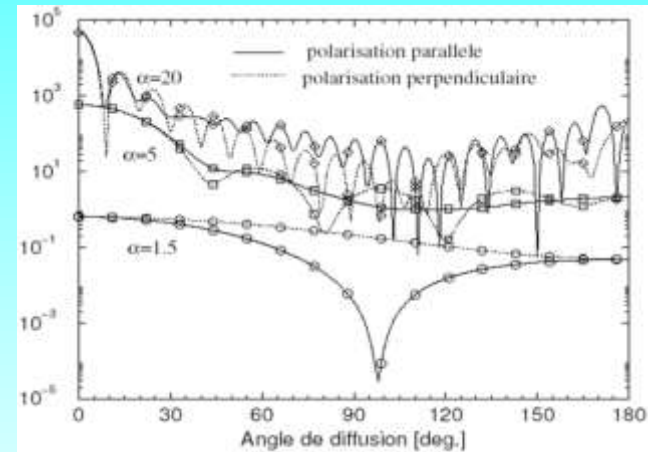
# Arc-en-ciel – Théorie de Lorenz-Mie

## Théorie de Mie et de Debye

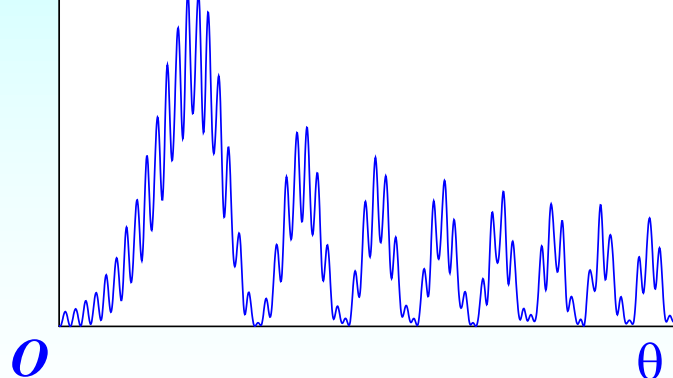


Interférence entre les rayons A, A' et B

Nombre de lobes  $\sim \alpha = \pi d / \lambda$

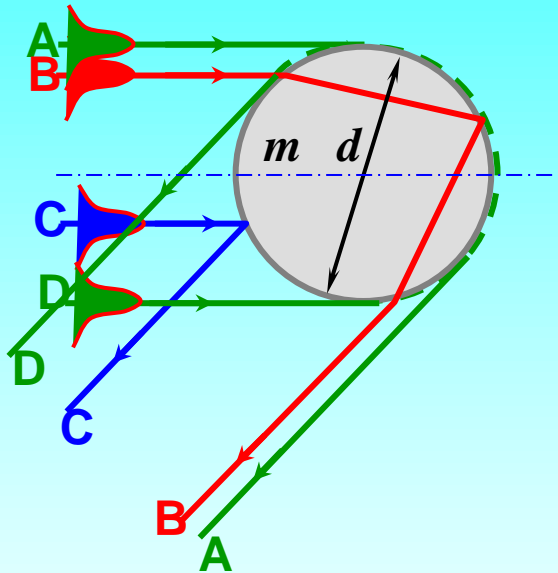


$I$  L'intensité aux alentours d'arc-en-ciel.



# Arc-en-ciel – TLMG

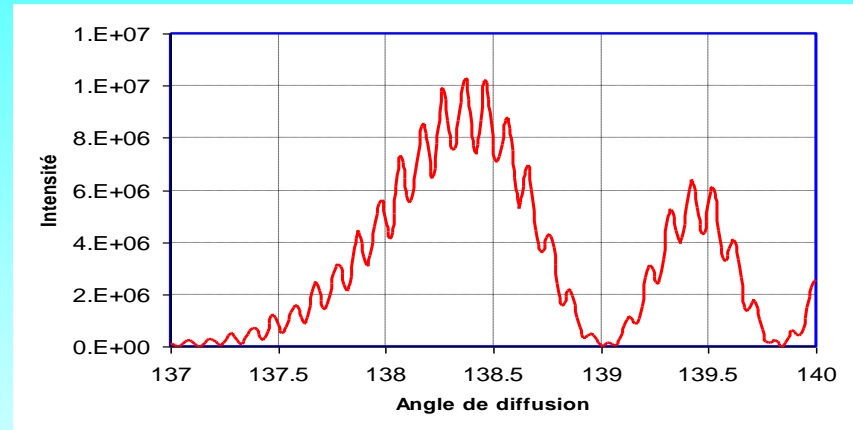
## Théorie de Mie généralisée et de Debye



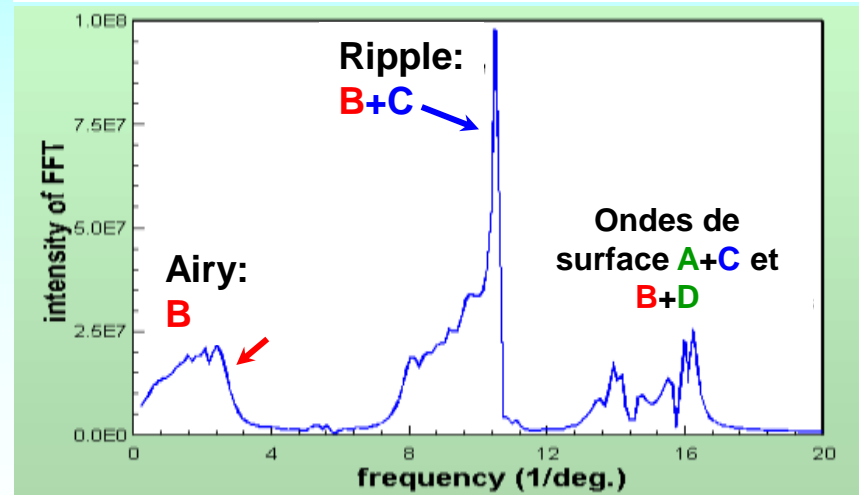
### Séries de Debye:

Séparation de tous les modes

- Diffraction
- Réflexion
- Réfraction d'ordre  $p$

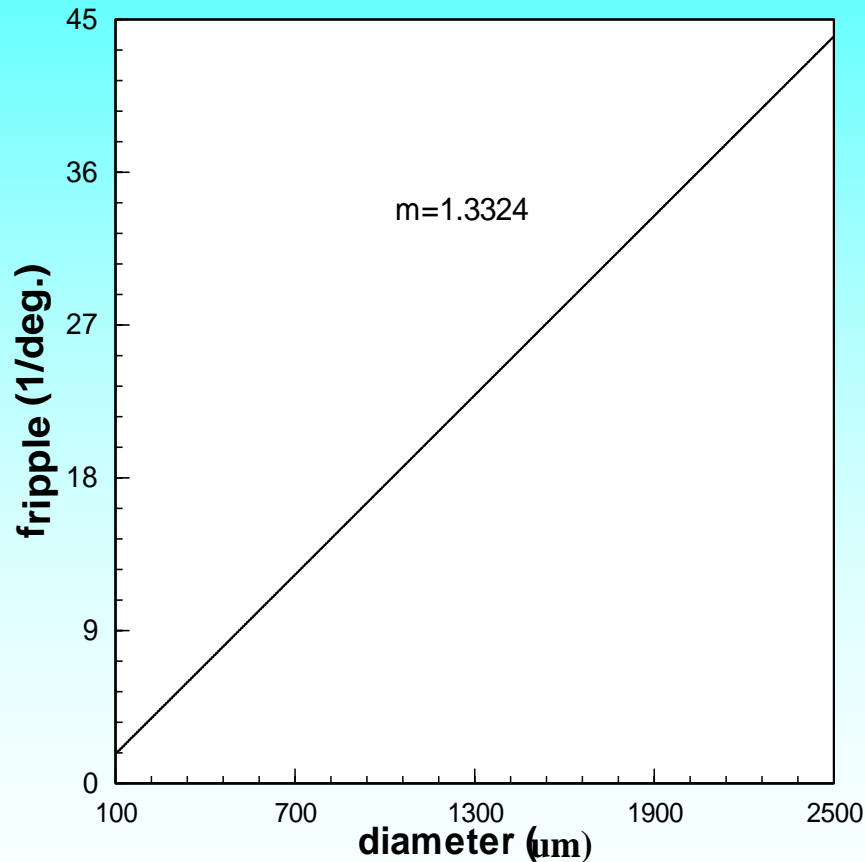


FFT



# Arc-en-ciel – métrologie

## Mesure de taille absolue



**Relation**  
diamètre-fréquence ripple  
*Un exemple de simulation*

$$d = 57 \lambda f_{\text{ripple}}$$

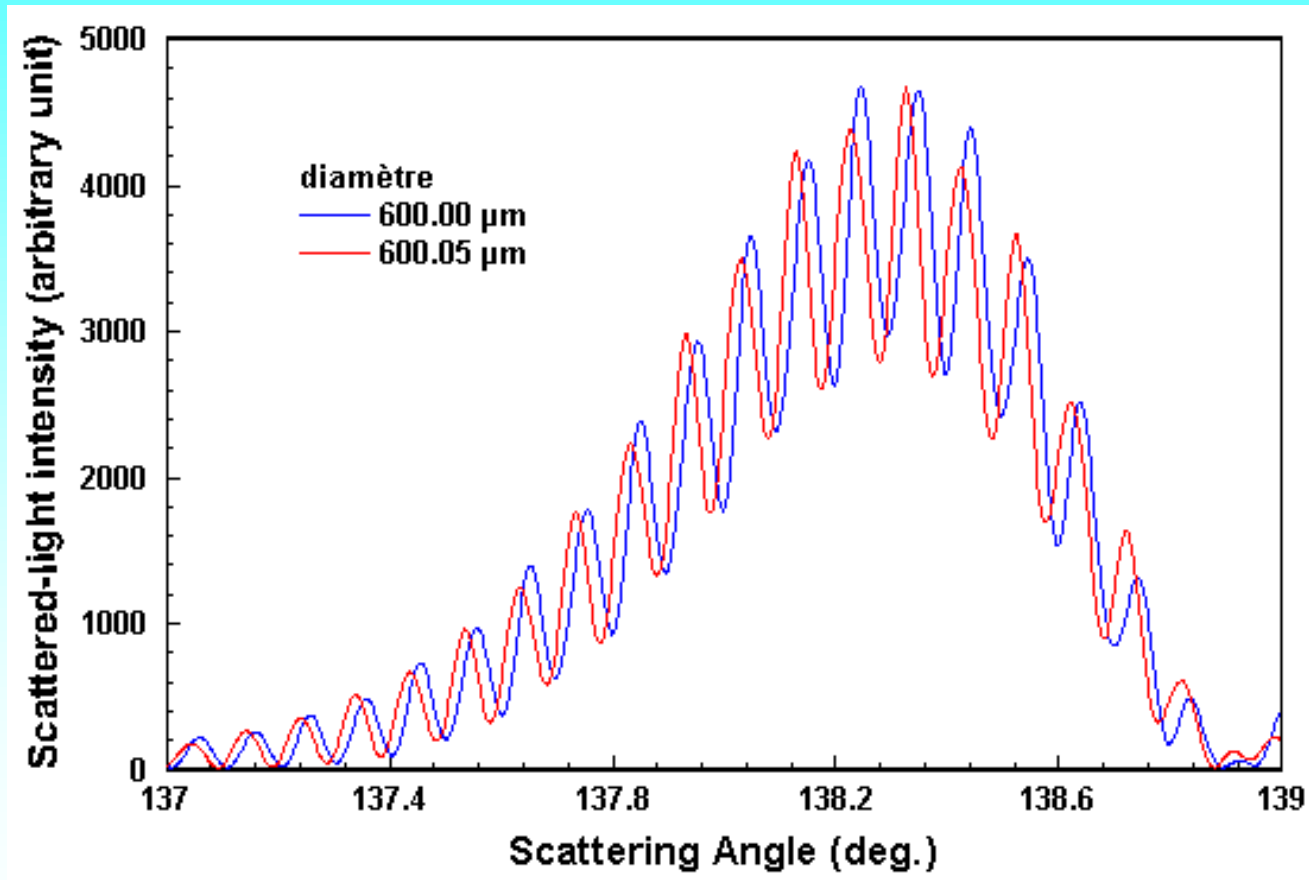
Erreur typique:  $600 \mu\text{m} \pm 2 \mu\text{m}$

### A vous de répondre:

- Le facteur dépend-il de la configuration ?
- En supposant que nombre de lobes  $\sim \alpha$ , trouver la relation entre  $f$  et  $d$ .

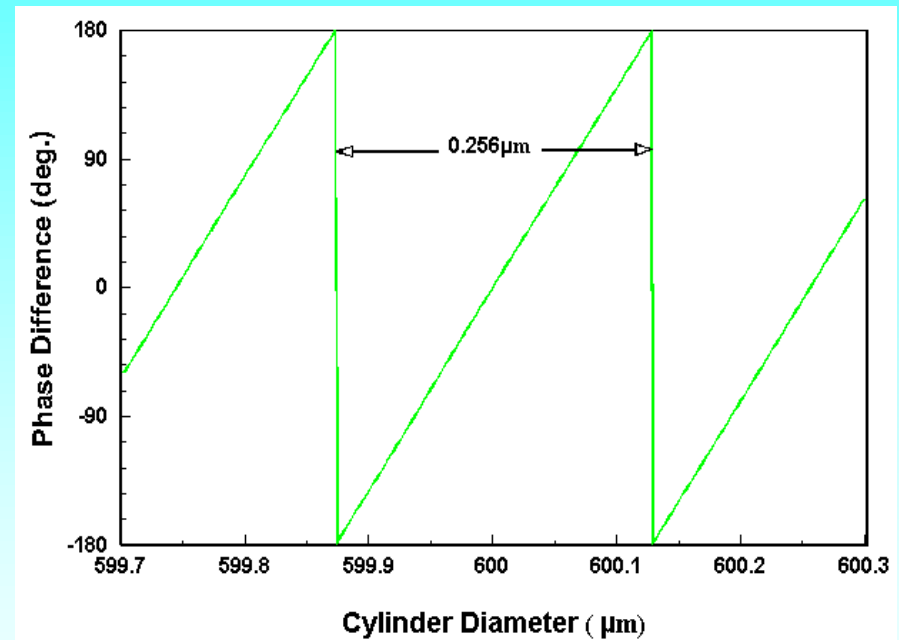
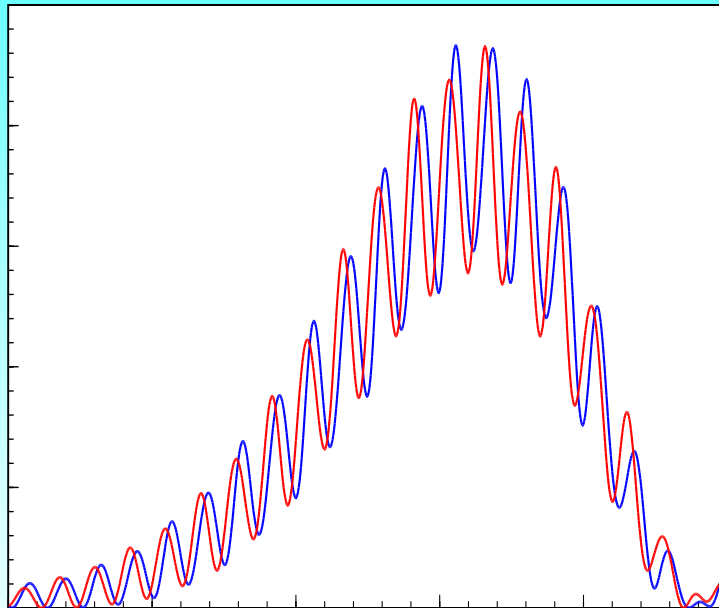
# Arc-en-ciel – métrologie

## Mesure de la variation de diamètre



# Arc-en-ciel – métrologie

## Mesure de la variation de diamètre

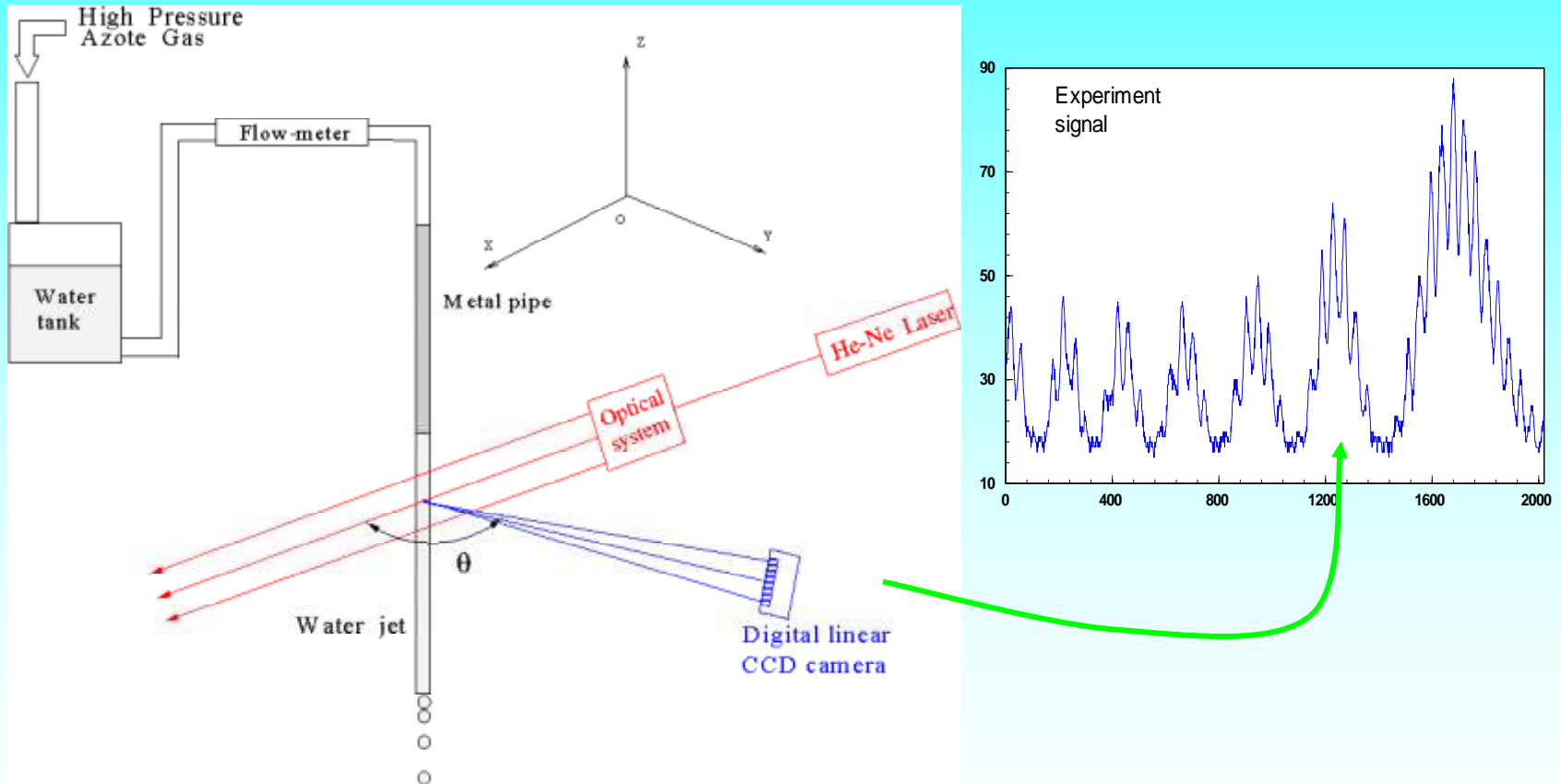


CSD



# Arc-en-ciel – métrologie

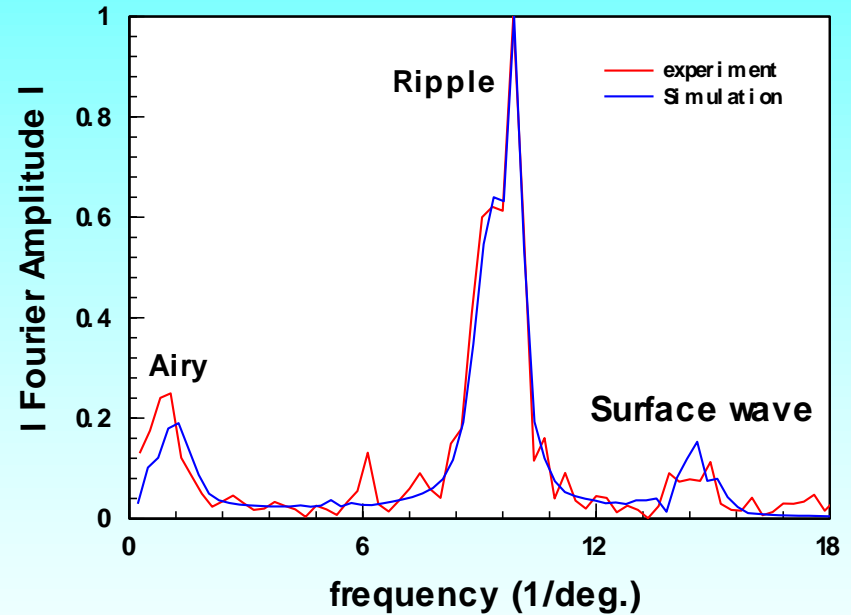
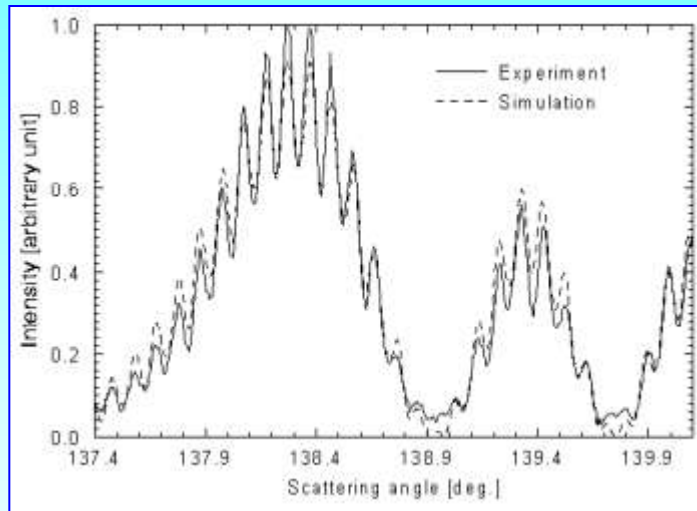
## Réalisation expérimentale



# Arc-en-ciel – métrologie

## Résultats expérimentaux

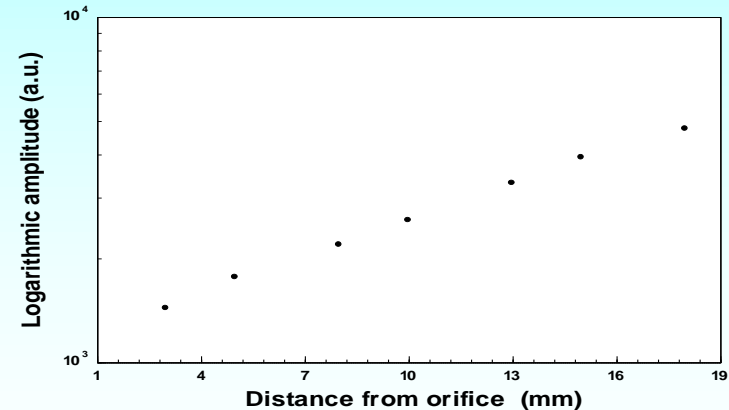
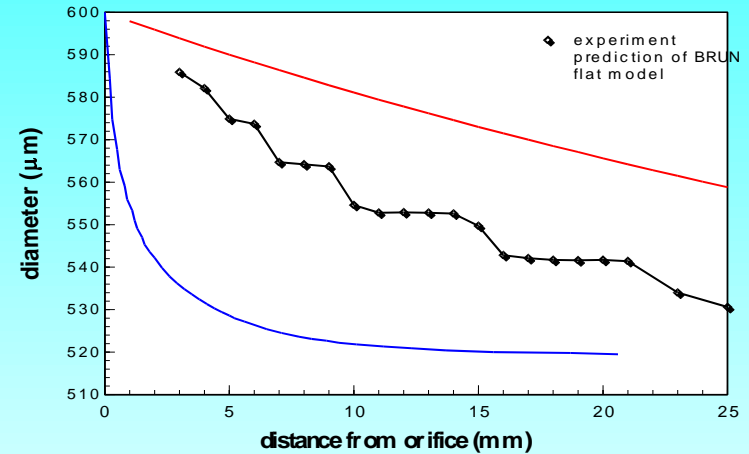
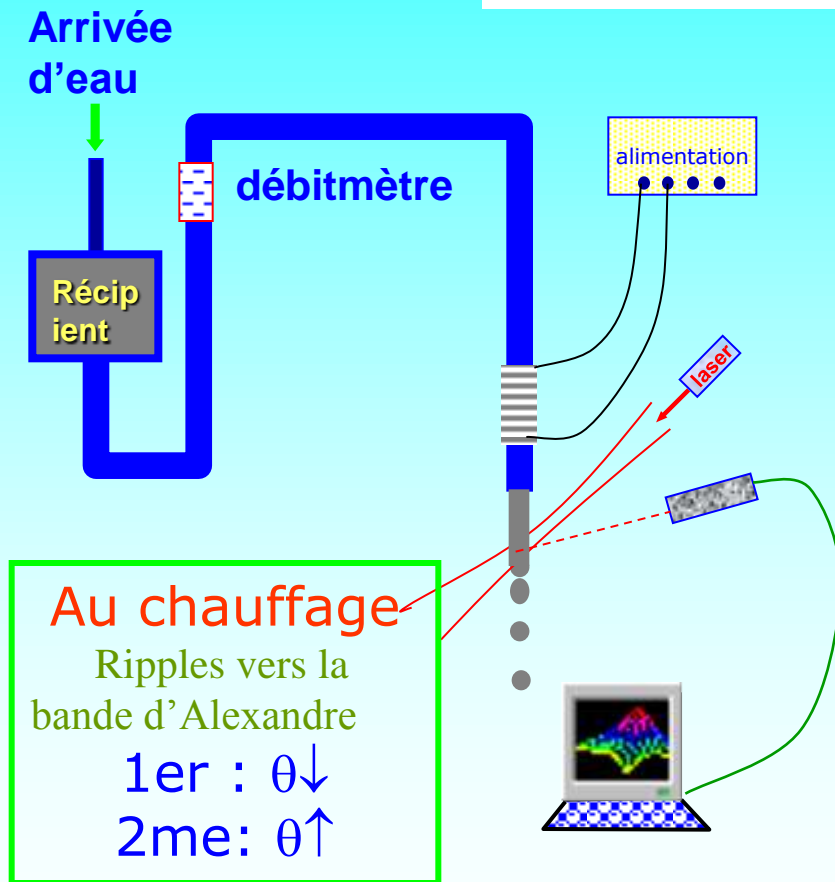
Comparaison entre les signaux mesurés et calculés



FFT de la dérivée

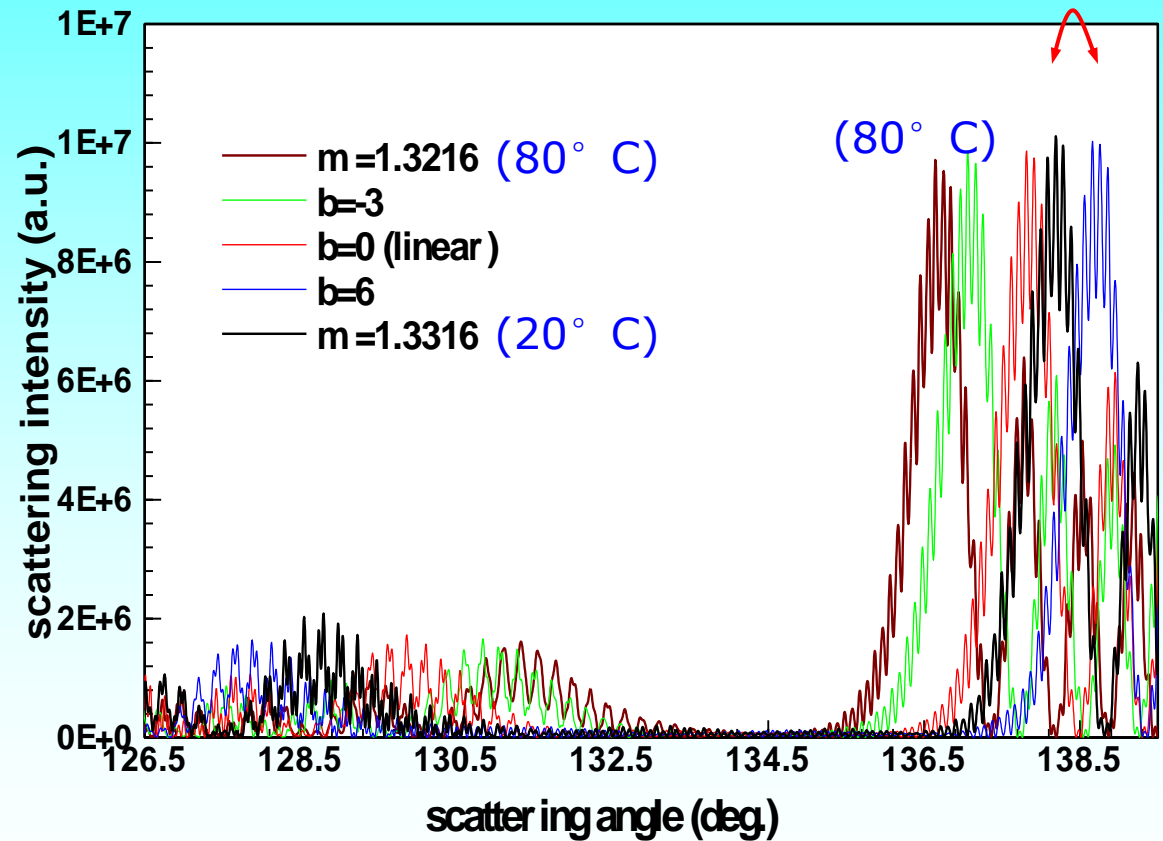
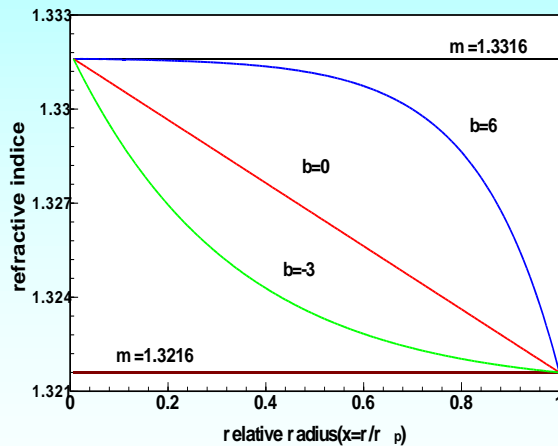
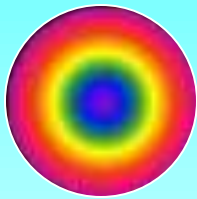
# Arc-en-ciel – métrologie

## Résultats expérimentaux



# Arc-en-ciel – métrologie

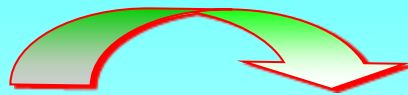
## Mesure du gradient de température



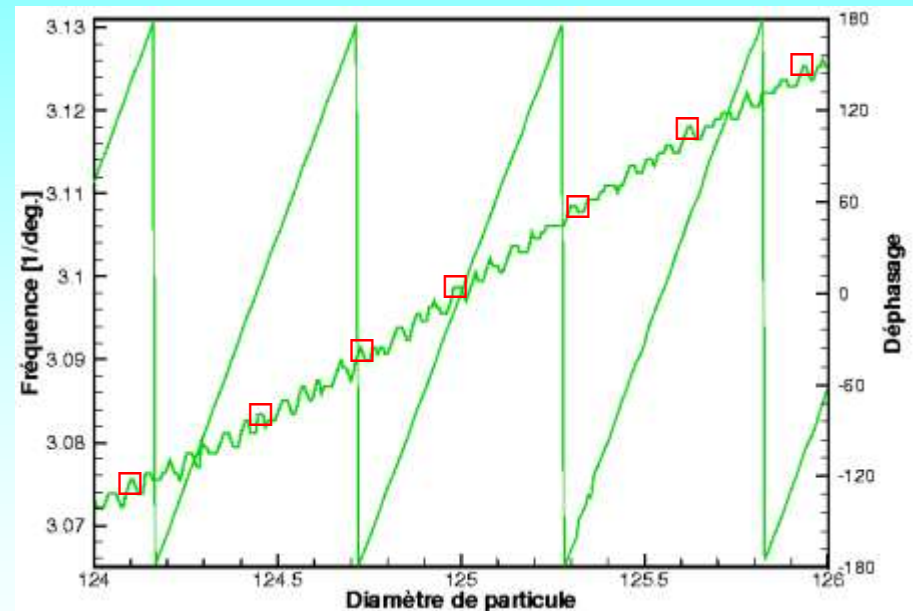
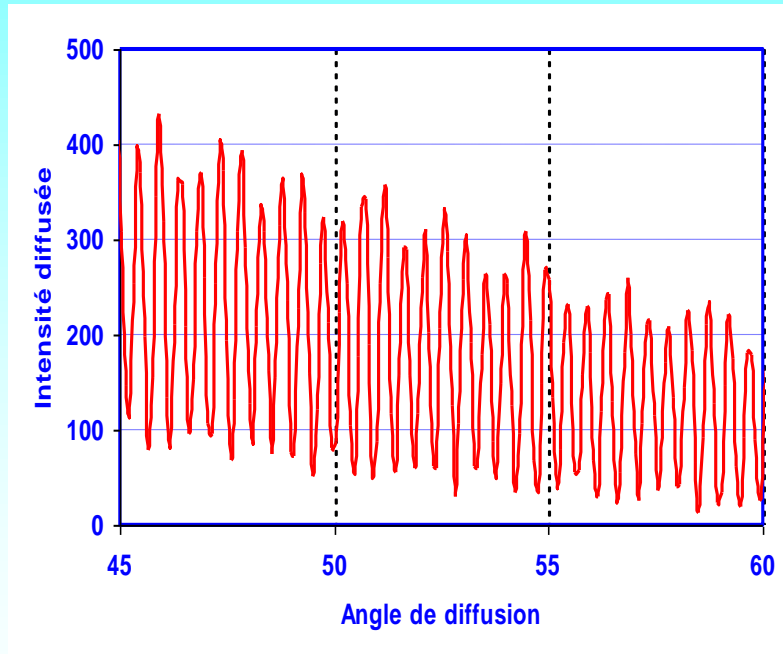
# Arc-en-ciel – métrologie

## Variante de la réfractométrie arc-en-ciel

### FFT & CSD



Fréquence ripple:  $\Delta d \sim 0,1 \mu\text{m}$   
Déphasage :  $\Delta d < 0,01 \mu\text{m}$

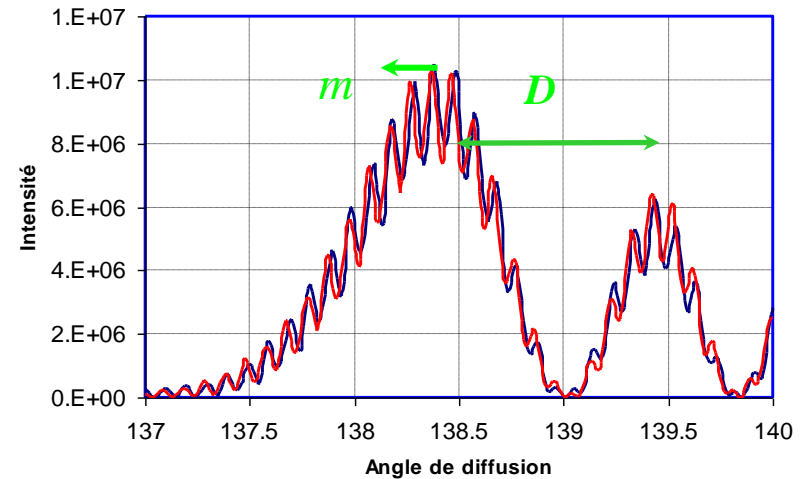


# Arc-en-ciel – métrologie

## Résumé de la réfractométrie d'arc-en-ciel

- **Indice de réfraction**
- **Taille de particule**

- ✓ **Gradient d'indice ou de température**
- ✓ **Taille précise et sphéricité**



**FFT**

$$f_{\text{rip}} \rightarrow d \text{ (600 } \mu\text{m)}$$

$$\delta d < 5 \mu\text{m}$$

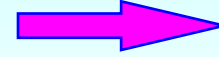
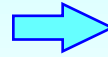
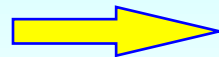
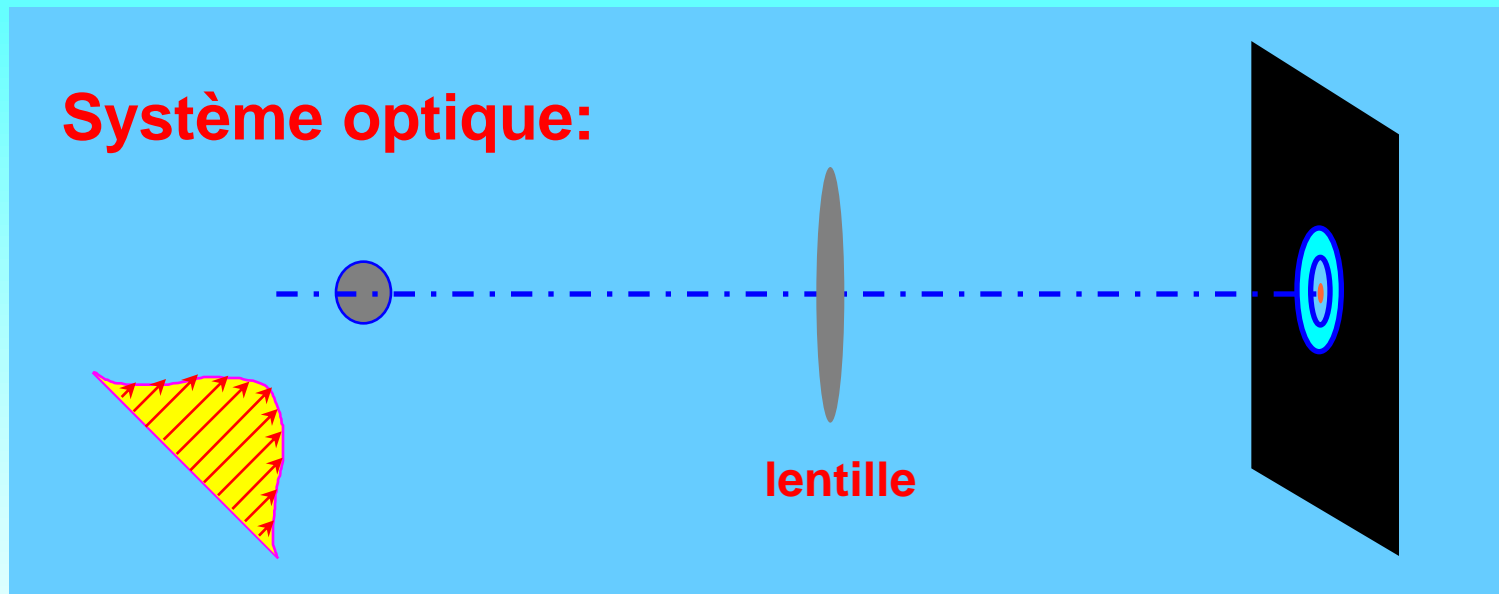
**CSD**

$$\Delta\phi \rightarrow \Delta d$$

$$< 10 \text{ nm}$$

# Imagerie – principe

## Principe théorique



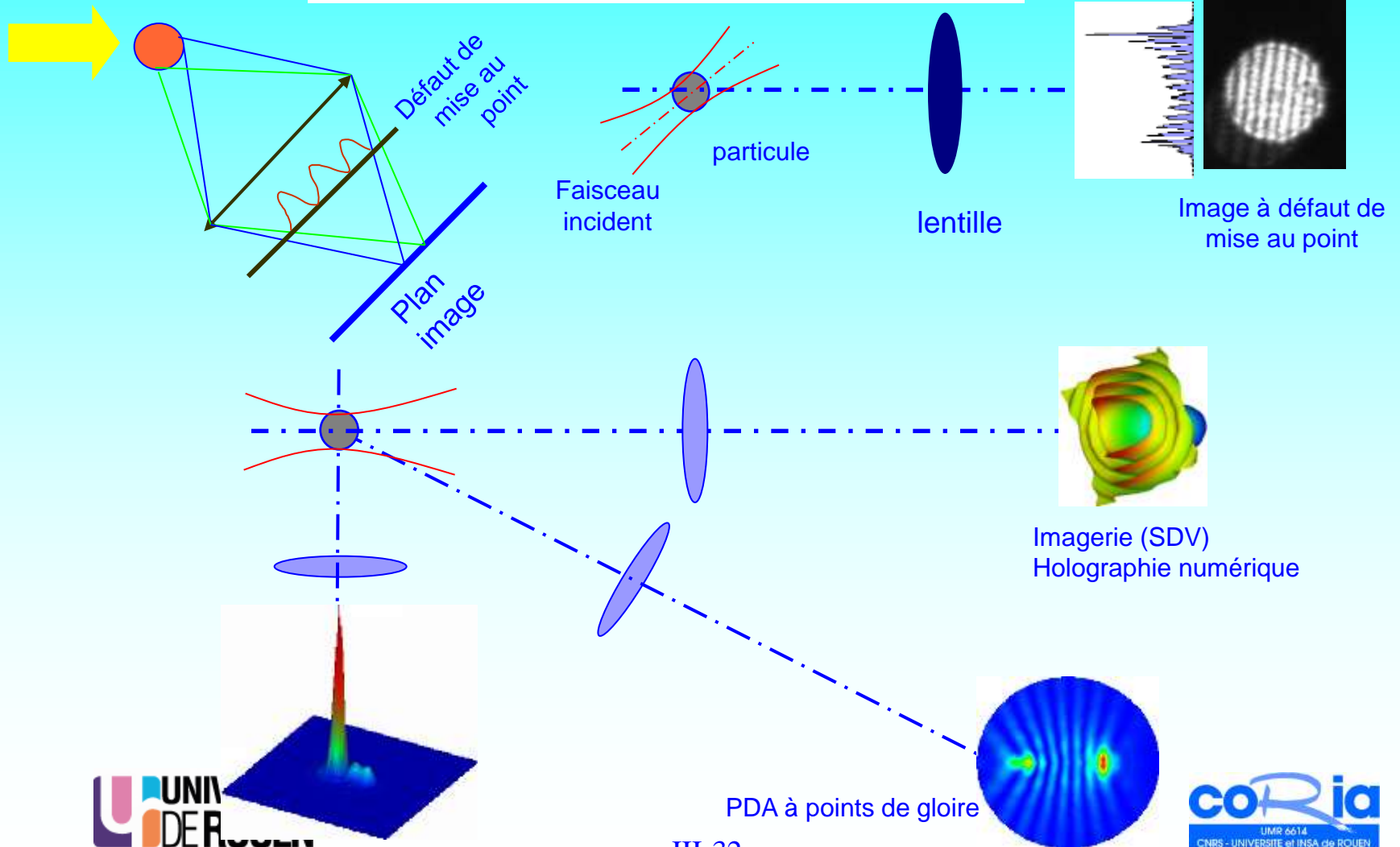
**TLMG/TLM**

**Fonction de transfert de la lentille**

**Intégration de Huygens-Fresnel**

# Imagerie

## Imagerie dans différents états

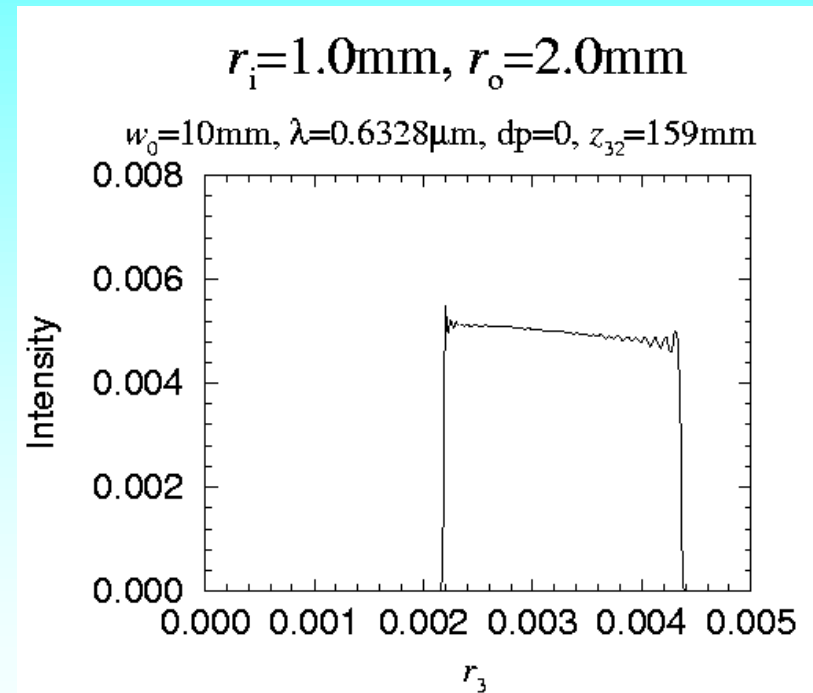
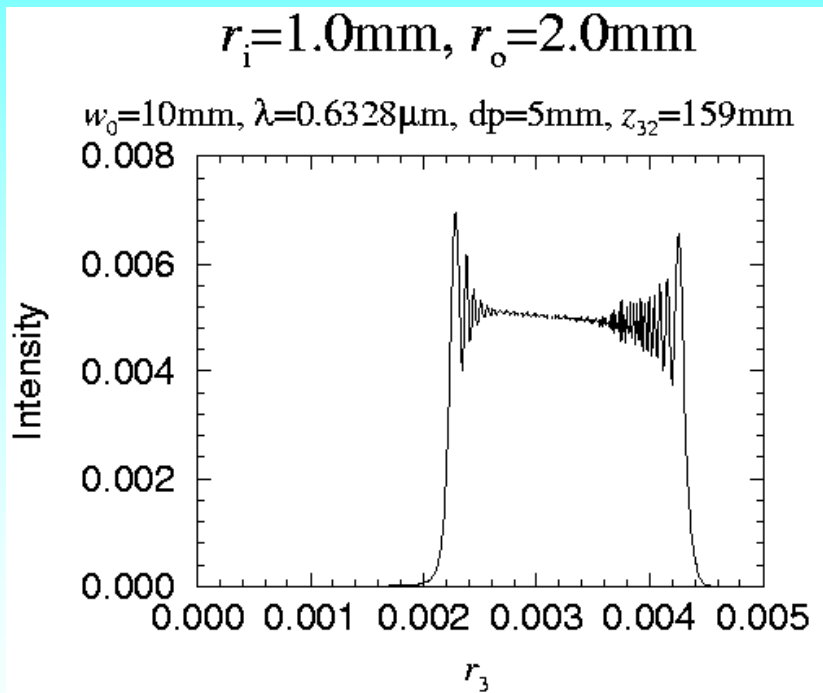




# Imagerie

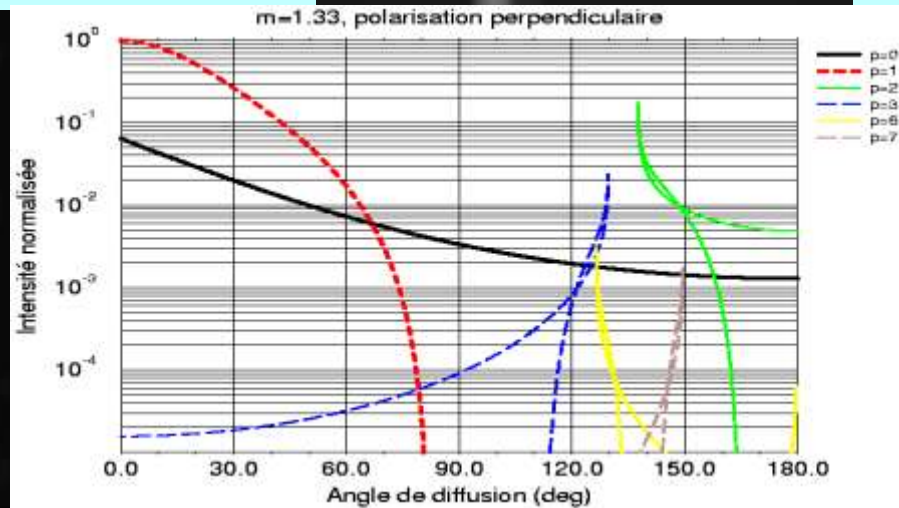
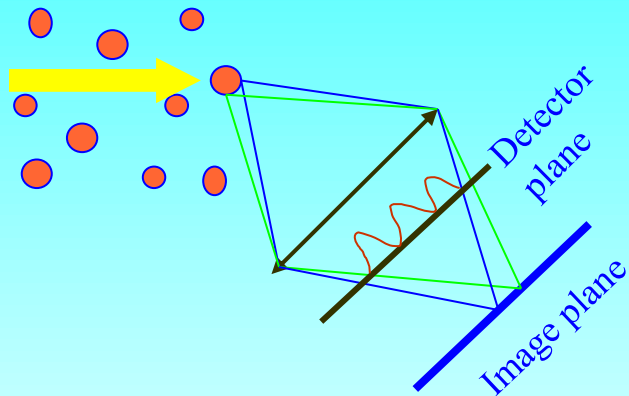
## Effet de diffraction

### Image d'un trou par TLMG:



# Imagerie

## Imagerie en défaut de mise au point



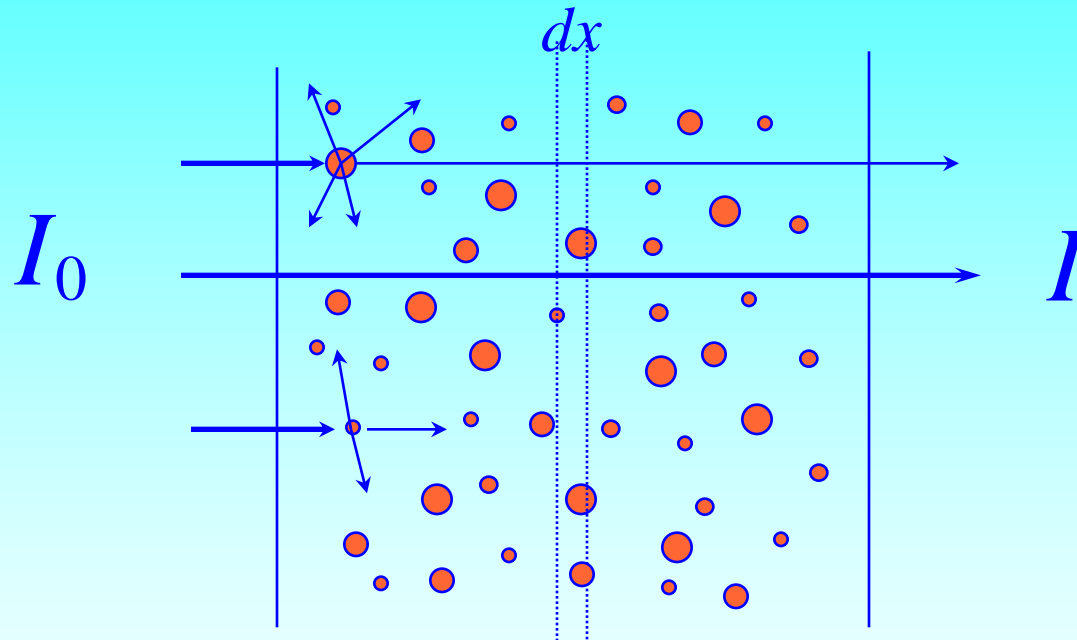
# Technique de mesure - 2

---

- **Mesure des particules individuelles**
  - LDV et PDA
  - Arc-en-ciel
  - Imagerie
  
- **Mesure des nuages de particules**
  - Turbidimétrie
  - Réfractomètre (Malvern)
  - Arc-en-ciel global

# Turbidimétrie - Principe

## Loi de Beer-Lambert



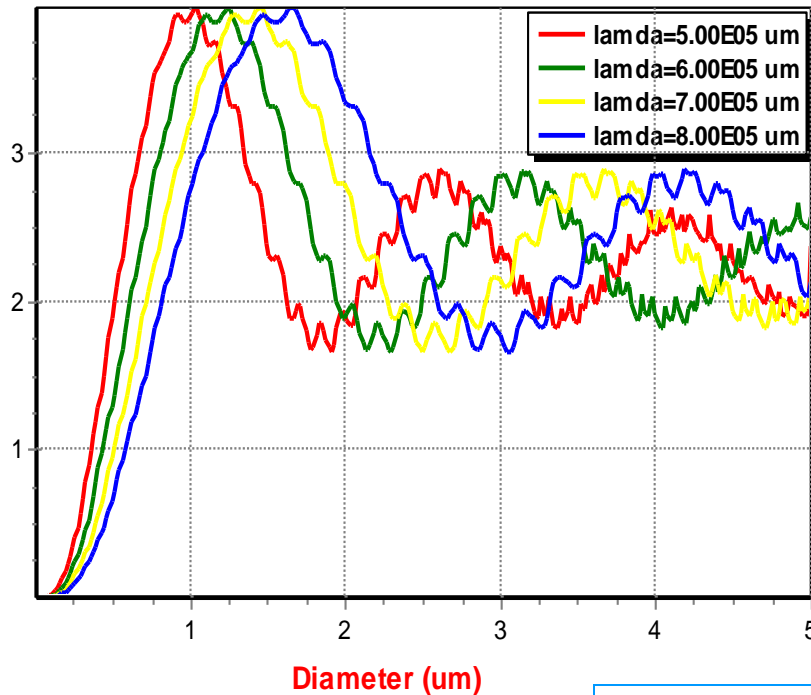
Bilan d'énergie:  $dI = -I n(r) C_{ext}(r, \lambda) dx$

Loi de Beer-Lambert:  $I = I_0 \exp \left[ -L \int_0^\infty C_{ext}(r, \lambda) n(r) dr \right]$

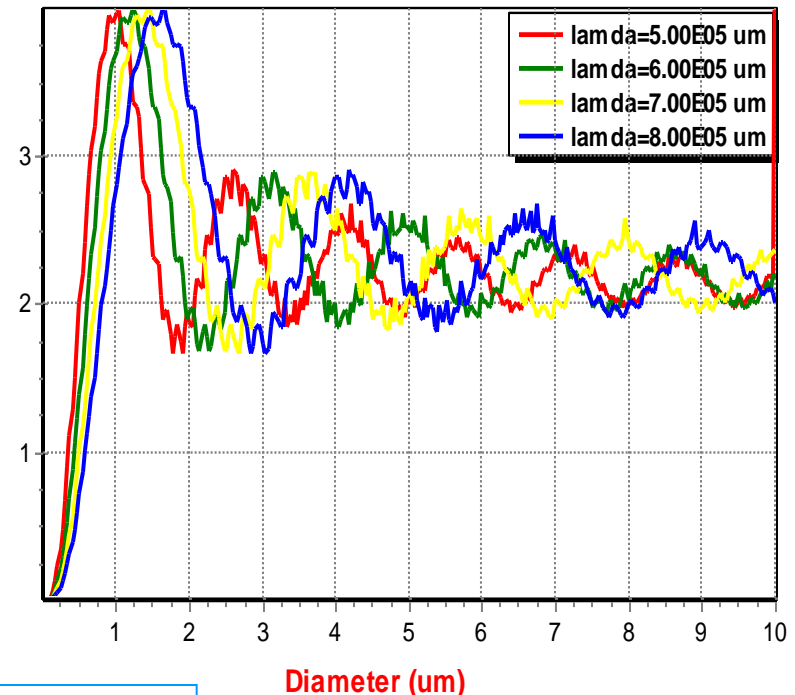
# Turbidimétrie

## Comportements de facteur d'extinction

Extinction Curves



Extinction Curves



$$d \ll \lambda,$$

$$Q_{ext} = \frac{8}{3} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^4 \operatorname{Re} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)$$

# Turbidimétrie

## Exercices d'applications

1. Sachant que les tailles des molécules atmosphériques sont très petites devant les longueurs d'onde du visible, expliquer pourquoi le soleil est rouge au lever et au coucher, et pourquoi le ciel est-il bleu vu de la Terre ?
2. L'éclairement (la puissance de rayonnement reçu par unité de surface perpendiculaire au rayonnement) en limite supérieure de l'atmosphère terrestre vaut  $1367 \text{ W/m}^2$ . On assimile l'atmosphère par une couche de  $10 \text{ km}$  d'épaisseur autour de la terre dont le coefficient d'extinction  $k$  est de  $0,102 \text{ km}^{-1}$ . Les midis aux solstices d'été et d'hiver, les rayons solaires frappent le sol à Rouen respectivement à  $26^\circ$  et  $72^\circ 54'$  par rapport au zénith. Calculer les éclairagements correspondants au niveau du sol.
3. En prenant en compte l'éclairage incliné sur le sol, calculer la puissance totale reçue sur une surface de  $10 \text{ m}^2$  à Rouen le midi au solstice d'été et le midi au solstice d'hiver. Expliquer le phénomène des saisons.

# Turbidimétrie

## Problème d'inversion

Particules mono-dispersées:

$$I = I_0 \exp(-LC_{ext}N)$$

$$LC_{ext}N = \ln(I_0/I)$$

$$N = \frac{\ln(I_0/I)}{LC_{ext}}$$

Particules polydispersées:

$$\sum_i C_{ext}(r, \lambda_j) N(r) = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{I_0}{I(\lambda_j)}\right)$$

Problème d'inversion :

$$\int_0^\infty A(r, \lambda) n(r) dr = s(\lambda)$$

section d'extinction

concentration

Spectre mesuré

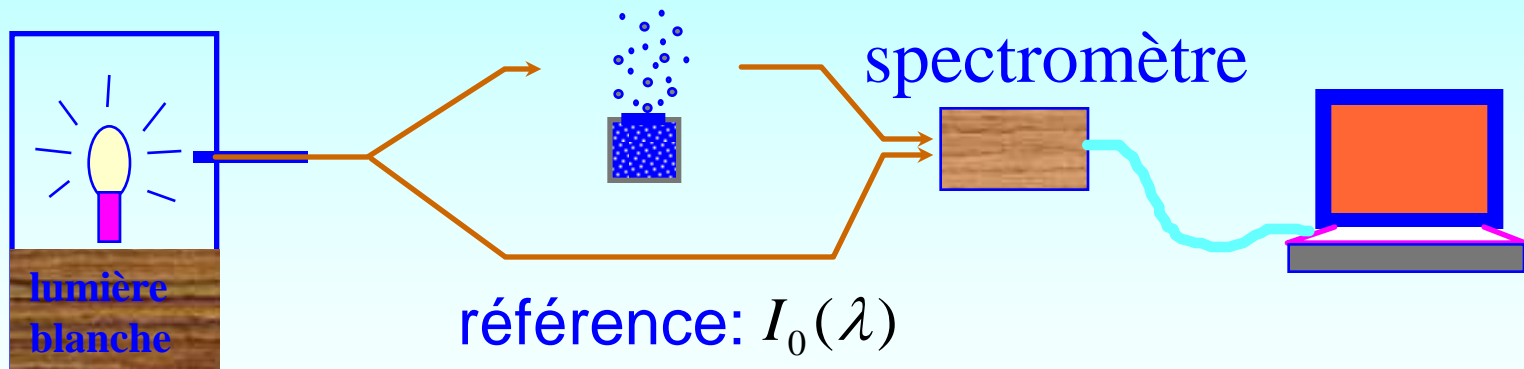
# Turbidimétrie

Problème d'inversion

$$I = I_0 \exp \left[ -L \int_0^{\infty} C_{ext}(r, \lambda) N(r) dr \right]$$

**RINVERSE:  $N(r)$**

mesure:  $I(\lambda)$

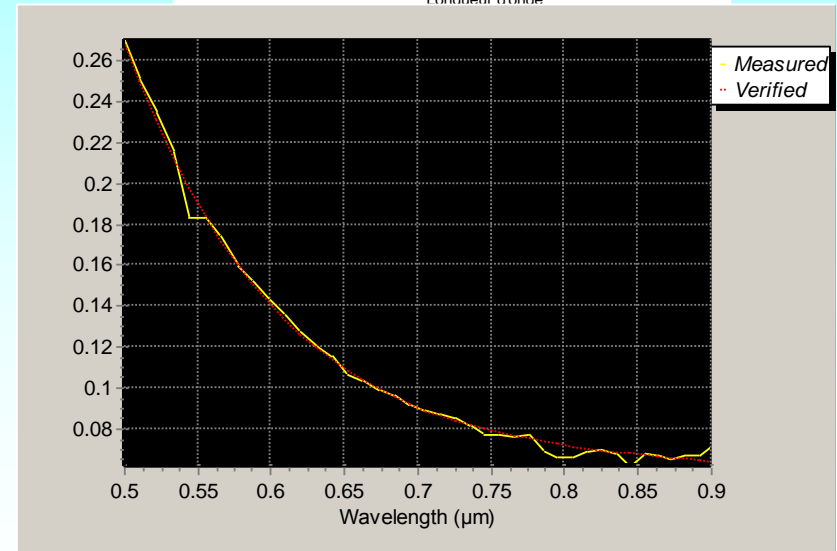
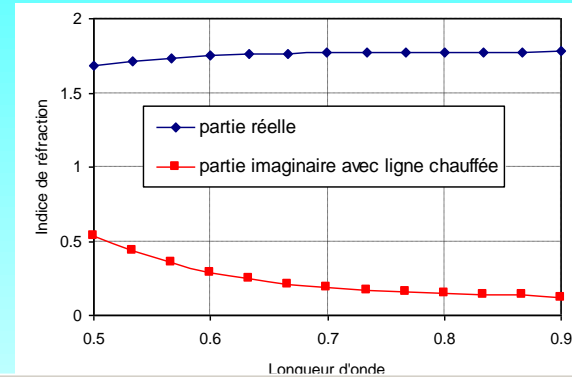
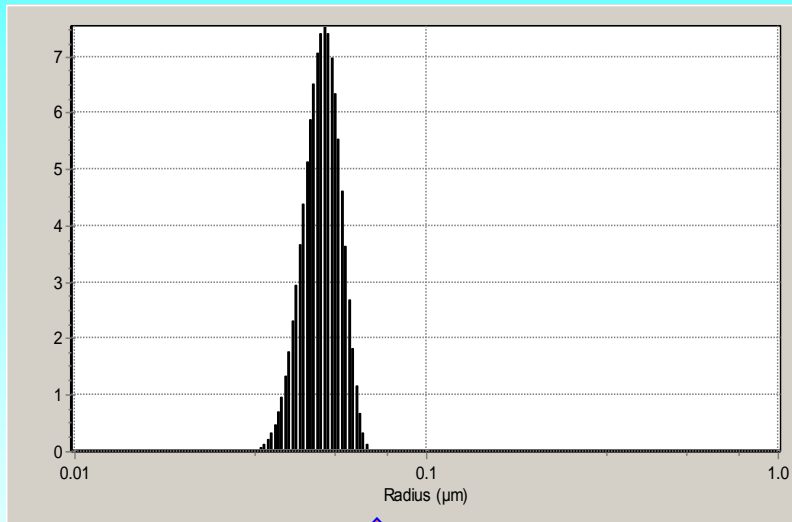


référence:  $I_0(\lambda)$



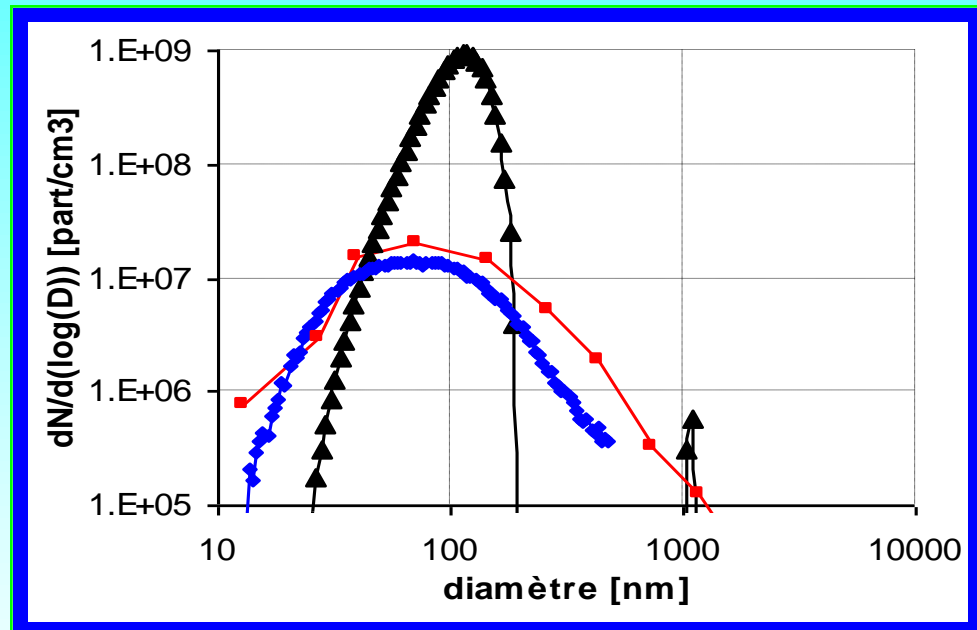
# Turbidimétrie

## Mesure des suies émises par le moteur (CERTAM)



# Turbidimétrie

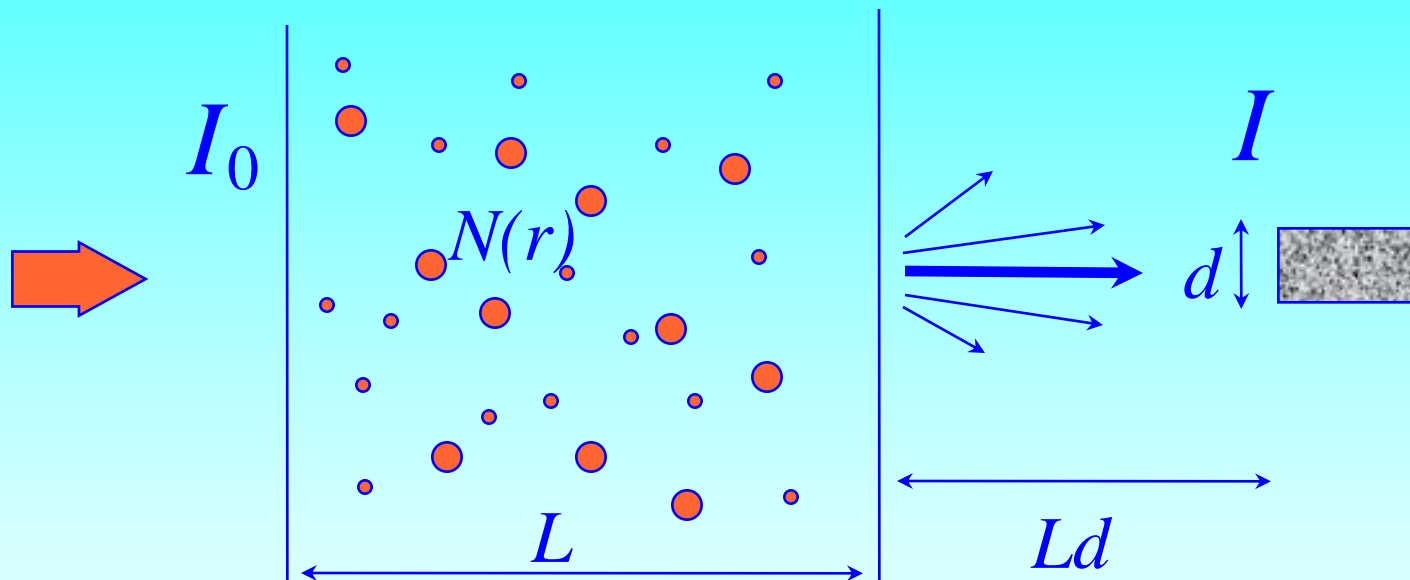
## Mesure des suies émises par le moteur (CERTAM)



	SMPS	ELPI	Turbidimétrie
$D$ moyen (nm)	86	111	101
$D$ modal (nm)	68	71	101
$f_v$	1.07E-8	1.62E-7	6.07E-8
$C_n$ (part/m <sup>3</sup> )	1.01E13	1.22E13	7.85E13

# Turbidimétrie

Précaution pour un milieu dense



- $N(r)L$  ne doit pas être trop petit (bruit de mesure) ni trop grand (diffusion multiple)
- $d/Ld$  doit être suffisamment petit

# Réfractomètre

## Problème d'inversion général

Particules mono-dispersées:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta} \right)^2$$

Particules polydispersées:

$$I(\theta) = I_0 \sum_i N(r) \left( \frac{J_1(k r \sin \theta)}{k r \sin \theta} \right)^2$$

Problème d'inversion :

$$\int_0^{\infty} A(r, \theta) n(r) dr = I(\theta)$$

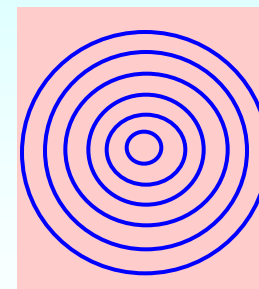
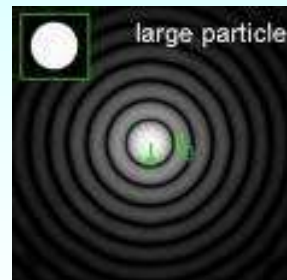
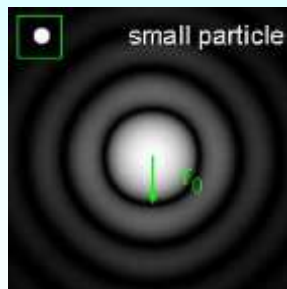
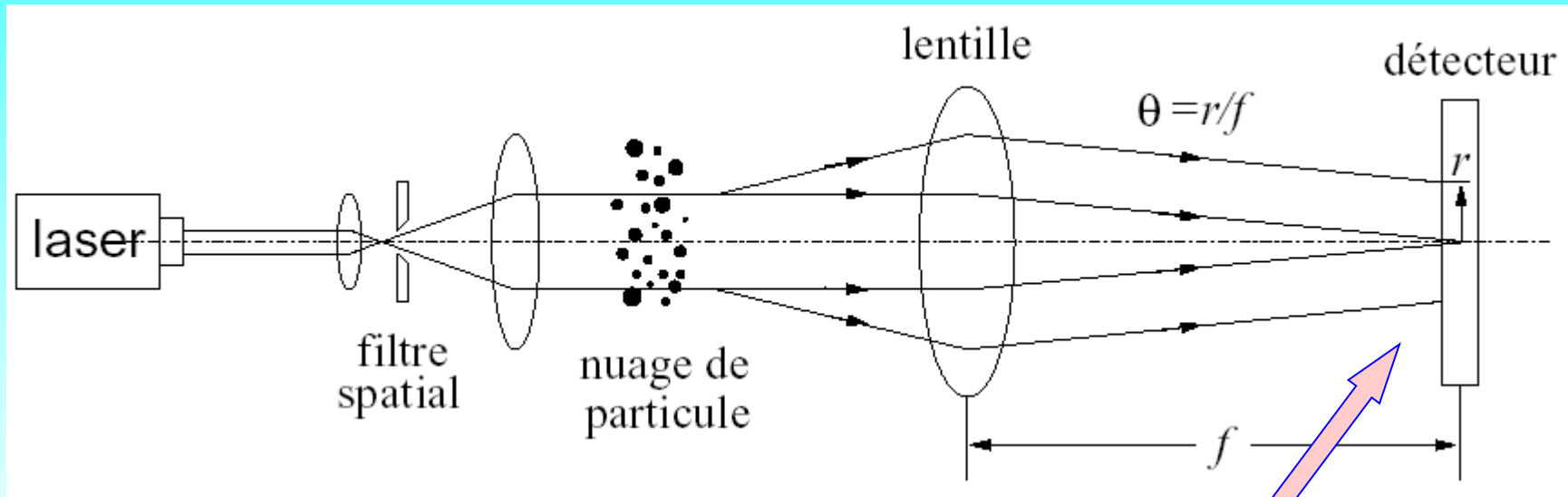
Diagramme de diffusion

concentration

Intensité angulaire

# Réfractomètre

## Principe du réfractomètre(Malvern)



# Arc-en-ciel global

## Principe de l'arcs-en-ciel global

Particule mono-dispersée :

$$I(m, r, \theta) \quad f_\theta \sim r, \Delta\phi \sim \Delta r, \theta_{\text{airy}} \sim m$$

Particules poly-dispersées:

$$I_t(\theta) = I_0 \sum_i N(r_i) I(r_i, \theta)$$

Problème d'inversion :

$$\int_0^\infty I(r, \theta) n(r) dr = I_t(\theta)$$

Diagramme de diffusion

concentration

Intensité angulaire

# Problème d'inversion

## Algorithme du problème d'inversion

Équation de Fredholm de premier espèce :

$$\int_0^{\infty} K(x, y) f(y) dy = g(x)$$

Discrétisation:

$$g_i + \varepsilon_i = \sum_j w_j K_{i,j} f_j$$

$\varepsilon_i$  – erreur de mesure,  $w_j$  – poids de discrétisation.

Une équation mal conditionnée

Régularisation:

$$M = \|Af - g\|^2 + B$$

# Problème d'inversion

## Algorithme du problème d'inversion

Phillips-Twomey :

$$(A^T A + \gamma H) f = A^T g$$

Contraintes physiques:

$$\begin{aligned} n(r) &> 0 \\ f(r=0) &= 0 \\ f(r \rightarrow \infty) &= 0 \\ f'(r=0) &= 0 \end{aligned}$$

Algorithmes NNLS (Lawson, SVD, ...)