

Métrologie diphasique  
**Métrologie des particules**

partie 2: Théories

---

*Kuan Fang REN*

**UMR 6614/ CORIA**  
**CNRS - Université et INSA de Rouen**



# Théories de diffusion de la lumière

## □ Modèles et théories approchés

- **Optique géométrique**
- **Diffraction**
- **Théorie de Rayleigh**
- **Théorie de Rayleigh-Gans**
- **.....**

## □ Théories rigoureuses

- **Théorie de Lorenz-Mie**
- **Théorie de Lorenz-Mie Généralisée**

# Optique géométrique

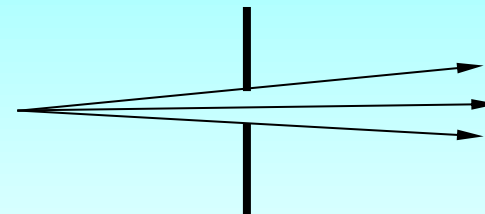
## Condition et applications directes

### Conditions d'utilisation:

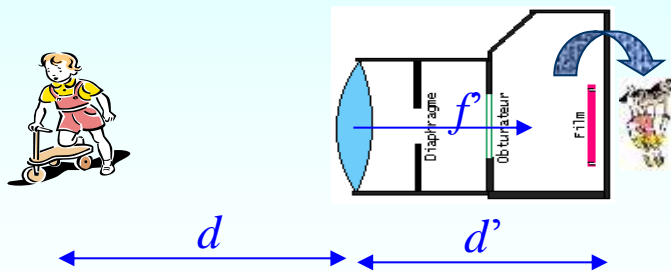
$$\lambda \ll l$$

longueur d'onde  $\lambda$  est très petite devant la dimension de l'objet  $l$ .

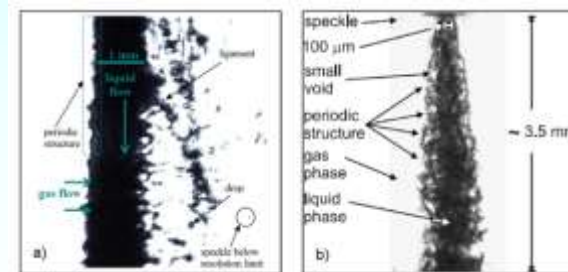
### 1. Propagation rectiligne dans un milieu homogène:



#### Photographie



#### Imagerie



# Optique géométrique – réflexion et réfraction

## Définition et sens physique de l'indice de réfraction

Réflexion et réfraction sur la surface séparant deux milieux d'indices différents

### Lois de Descartes

Réflexion:

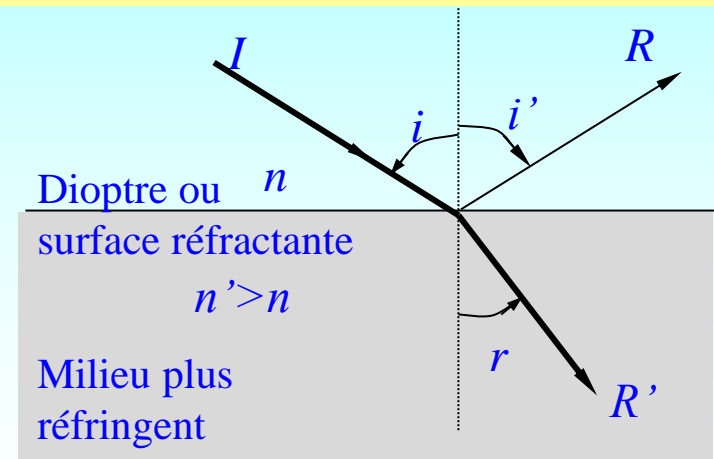
$$i = i'$$

Réfraction:

$$n \sin i = n' \sin r$$

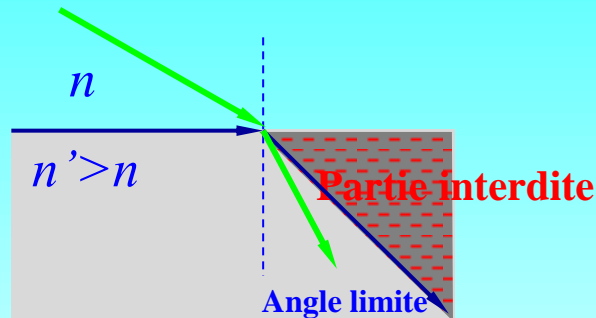
La célérité  $v$  dépend de l'indice de réfraction  $n$  du milieu:

$$n = \frac{c}{v}$$



# Optique géométrique – réflexion et réfraction

## Réflexion totale

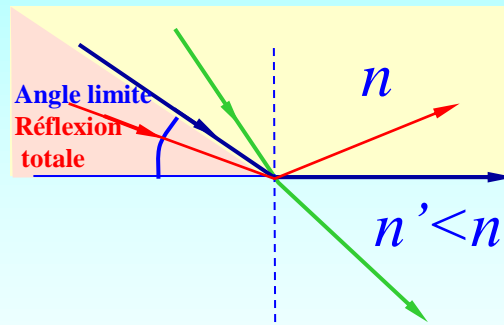


Angle limite:

$$i_l = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Réflexion total:

$$i \geq i_l$$



Exemples :

$$n_2 / n_1 = 1 / 1.333 \quad i_l = 48.6^\circ$$

$$n_2 / n_1 = 1 / 1.500 \quad i_l = 41.8^\circ$$

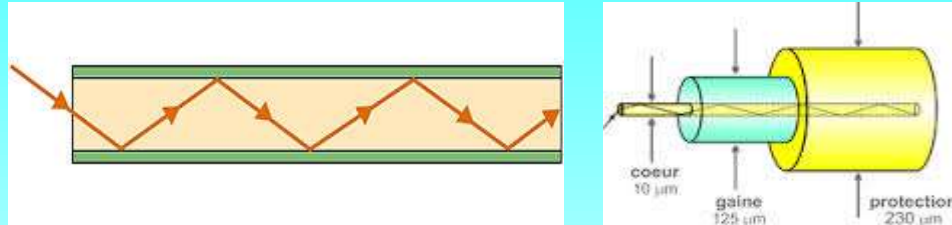
## Applications

- Fibre optique
- Télécommunication
- Transport de faisceaux lumineux
- Angle critique pour mesure de bulles
- Jauge optique
- Mirage naturel

# Optique géométrique – réflexion et réfraction

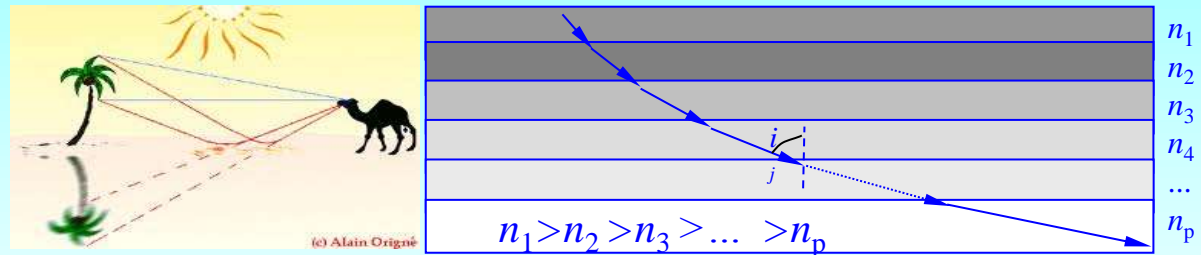
## Réflexion totale - applications

### Application 1: *Fibre optique*

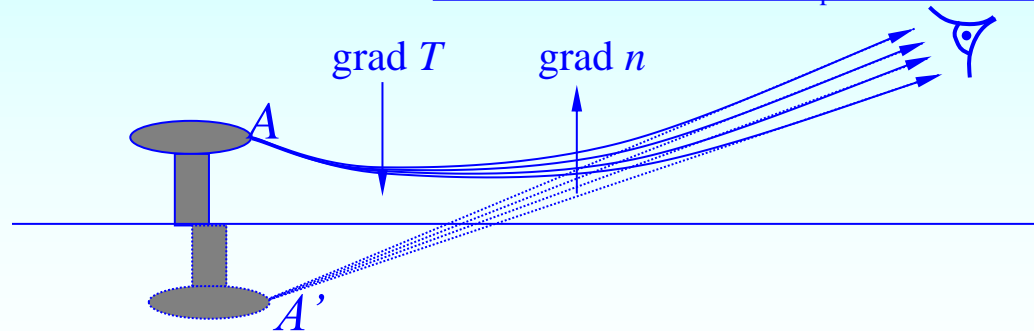


### Application 2: *Effet de mirage*

Propagation d'un rayon lumineux dans un milieu stratifié parallèle:



$n_j \sin i_j = C$   
 $n_i \downarrow$  jusqu'à  $i_j = 90^\circ$ ,  
 c-à-d réflexion totale.



# Optique géométrique – réflexion et réfraction

## Relation des amplitudes et des intensités

**Équations de Fresnel** – relation entre les amplitudes des ondes réfléchi/réfractée et incidente

$$r_X = \frac{E_X^r}{E_X^i}, \quad t_X = \frac{E_X^t}{E_X^i}$$

$X = \perp$  ou  $\parallel$  état de polarisation

$E_X^i$ : amplitudes de l'onde incidente

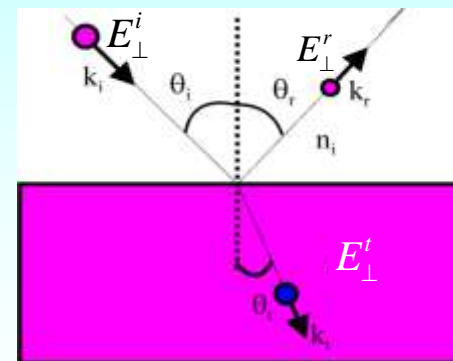
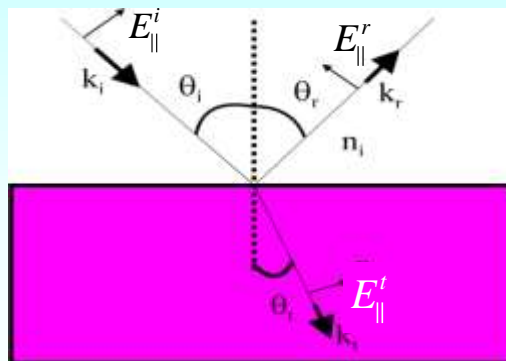
$E_X^r, E_X^t$  amplitudes des ondes réfléchi/réfractée

$$r_{\parallel} \equiv \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$r_{\perp} \equiv \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

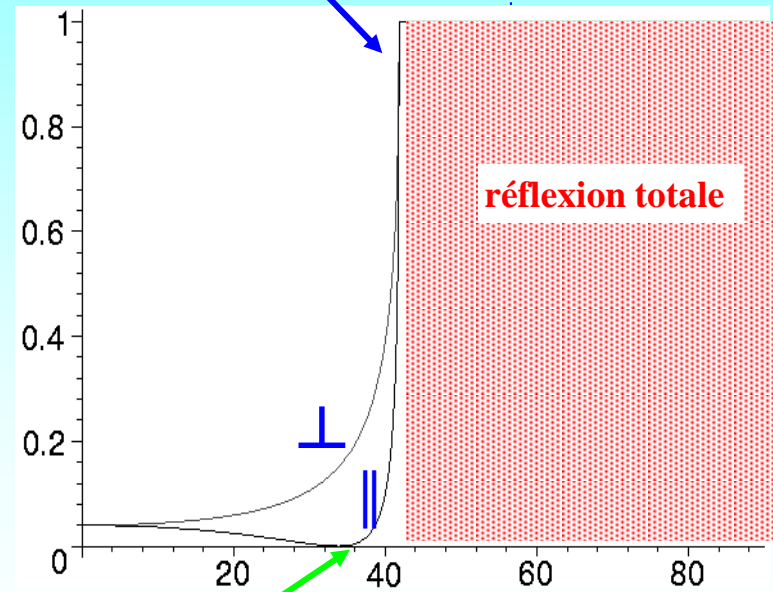
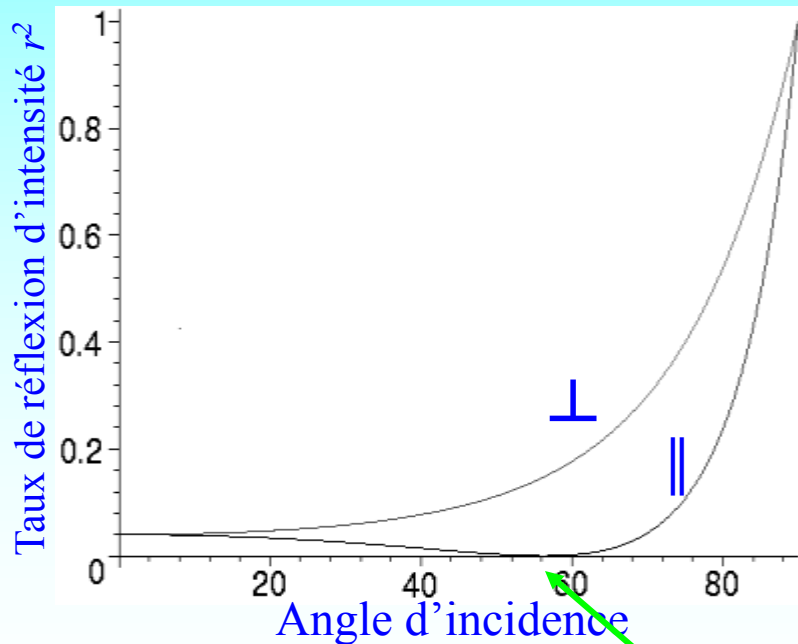
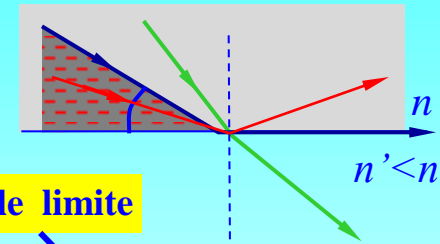
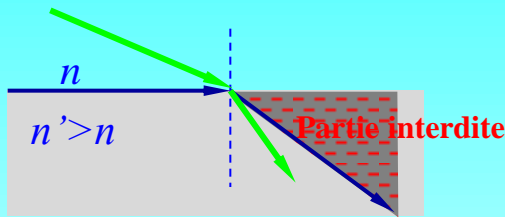
$$t_{\parallel} \equiv \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

$$t_{\perp} \equiv \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$



# Optique géométrique – réflexion et réfraction

## Relation des amplitudes et des intensités



Angle de Brewster:  $\theta_i + \theta_r = \pi/2$



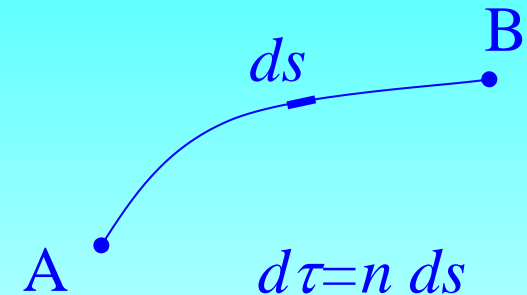
# Optique géométrique – application à la diffusion

## Chemin optique, phase et intensité

Propagation de la lumière dans un milieu:

Chemin optique:

$$\tau(AB) = \int_A^B n(s) ds$$



Indice de réfraction complexe:

$$\tilde{m} = m_r - im_i$$

- **Différence de phase:**  $\Delta\phi(AB) = k\tau_r = km_r\Delta S$
- **Absorption:**  $I(B) = I(A)\exp(-2k\tau_i) = I(A)\exp(-2km_i\Delta S)$
- **Si  $n$  est constant:**  $\Delta\phi = km_r\Delta S$

$$I = I_0 \exp(-2km_i\Delta S)$$

# Optique géométrique – application à la diffusion

## Réflexion et réfraction dans une particule

### Application à la diffusion par une sphère:

- Intensité :

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= r_X^2 & p=0 \\ \epsilon_X &= r_X^{2(p-1)}(1-r_X^2)^2 & p \geq 1 \end{aligned}$$

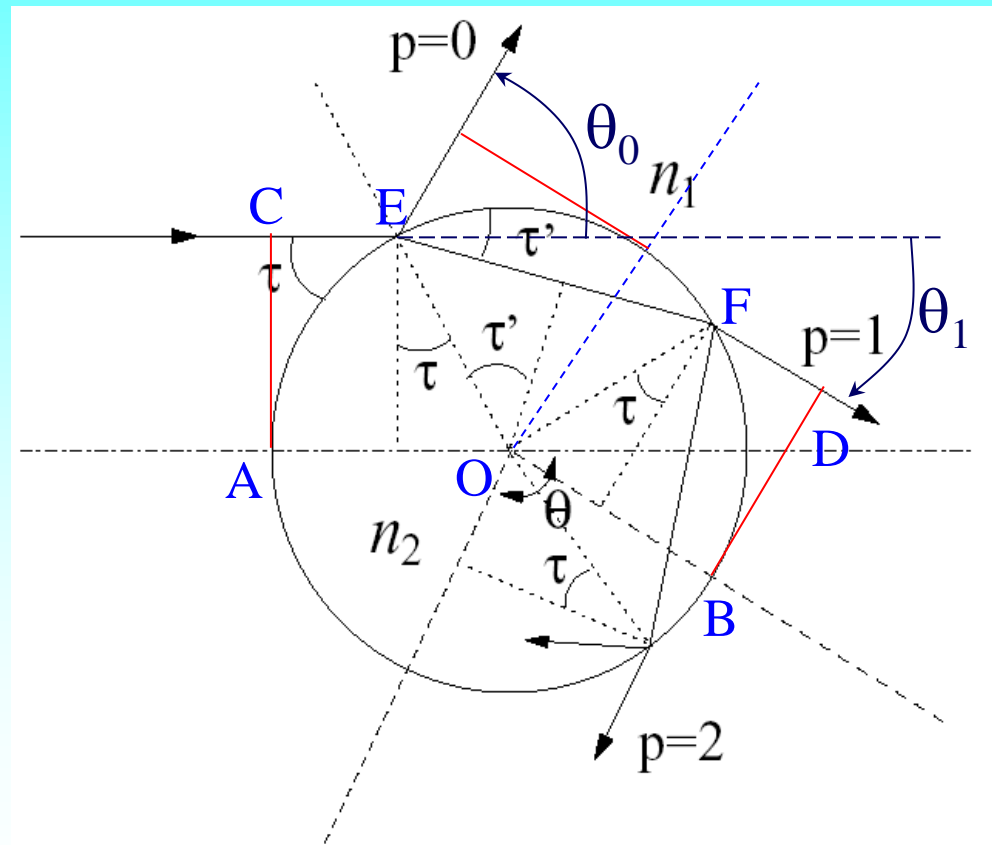
où  $p$  indique l'ordre de diffusion,  
 $X$  représente l'état de polarisation  
 ( $\perp$  ou  $\parallel$ ),  $r_X$  coefficients de Fresnel.

- Longueur du trajet dans la particule:

$$\Delta = 2pa \sin \tau'$$

- Angle de déviation:

$$\theta = 2\tau - 2p\tau'$$



# Optique géométrique – application à la diffusion

## Réflexion et réfraction dans une particule

### ➤ Phases:

- Différence de phase due à la différence de chemin optique :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin \tau - pm \sin \tau')$$

- Sauts de phase dûs aux : réflexion sur la surface et ligne focale

### ➤ Facteur de divergence:

$$D = \frac{\cos \theta_i \sin \tau}{\sin \theta_p \left| \frac{d\theta'_p}{d\tau} \right|}$$

car

$$I_s = \frac{I_0 \varepsilon_X dS_i}{dS_s} = \frac{I_0 \varepsilon_X a^2 \cos \tau \sin \tau d\tau d\varphi}{r^2 \sin \theta_p d\theta_p d\varphi} = \frac{a^2}{r^2} I_0 \varepsilon_X D$$

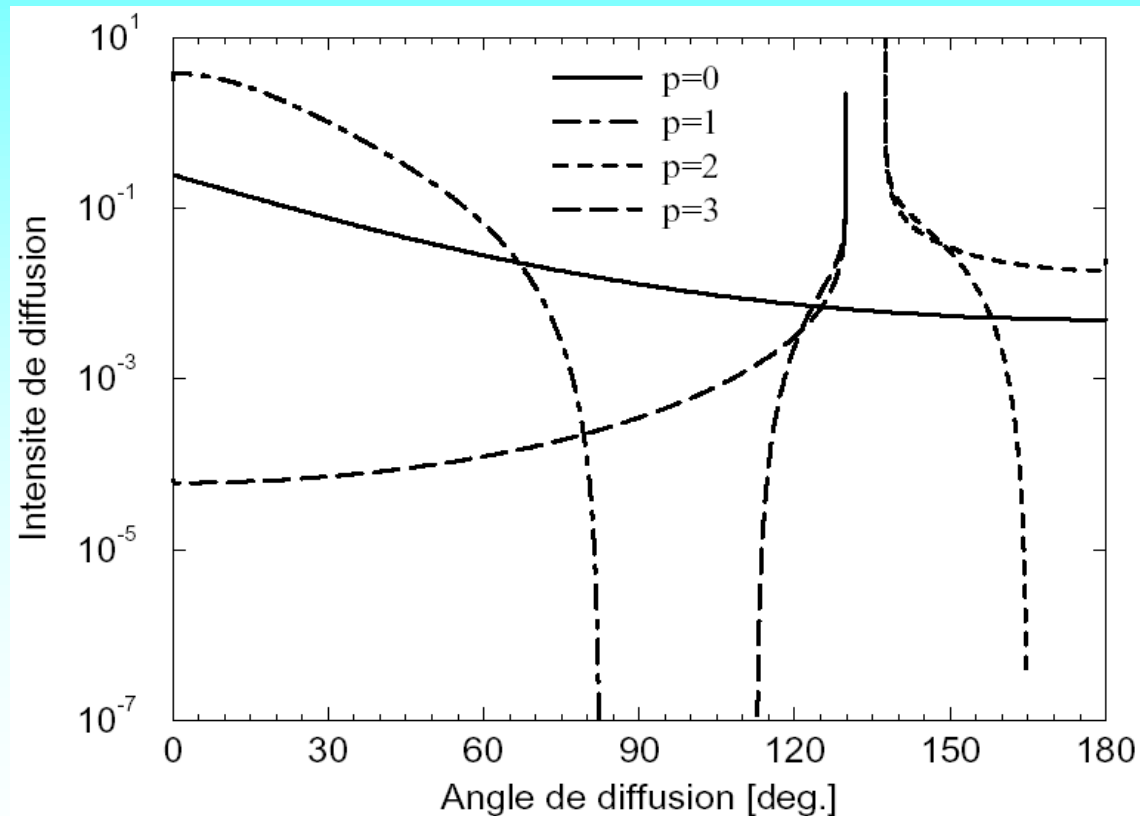
# Optique géométrique – application à la diffusion

## Réflexion et réfraction dans une particule

### Diagramme de diffusion d'après l'optique géométrique

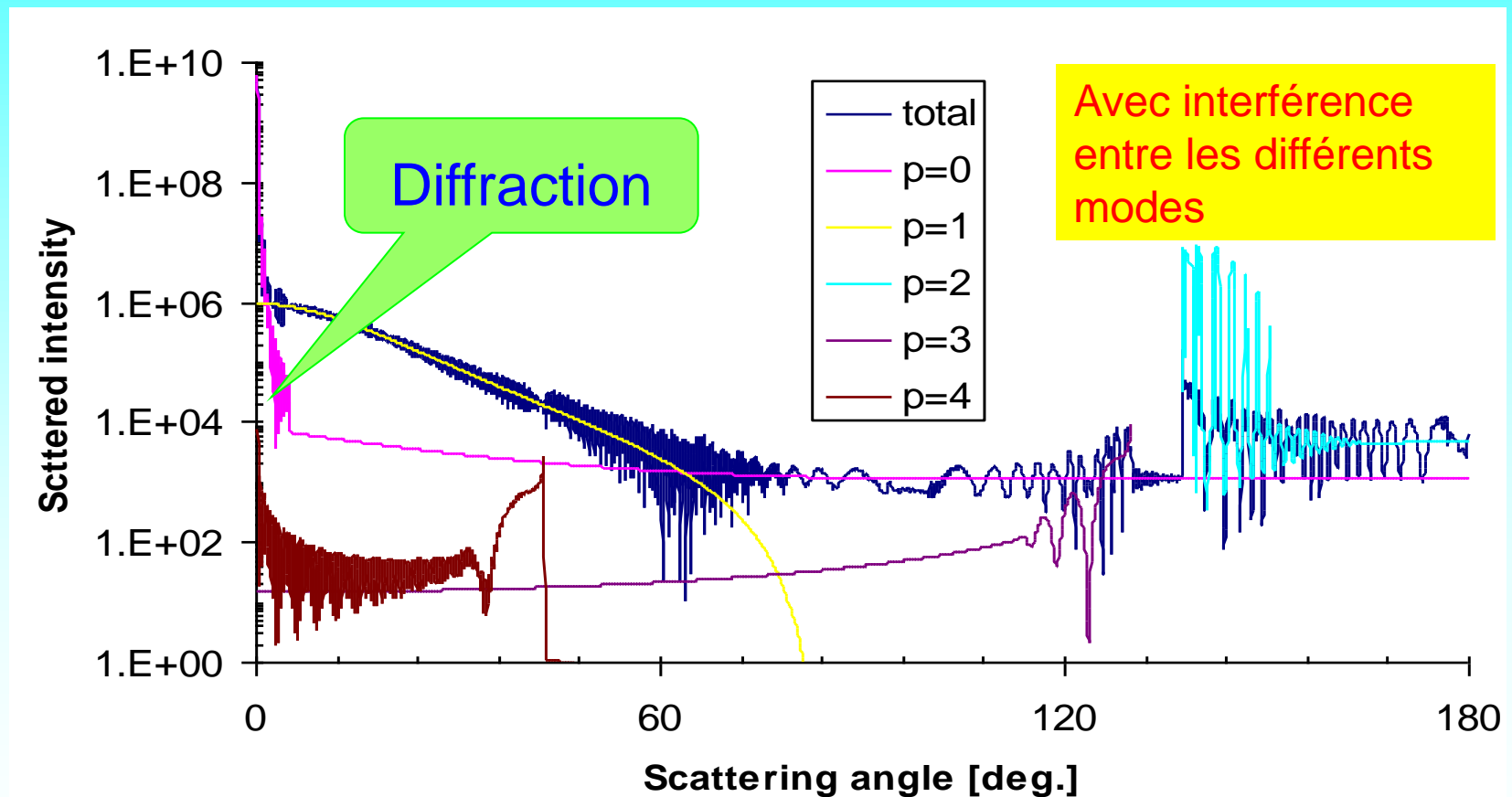
Sans  
interférence  
entre les  
différents  
modes

- Sphère d'eau
- Polarisation  $\perp$
- Intensité  $\rightarrow \infty$   
à l'angle d'arc-en-ciel



# Optique géométrique – application à la diffusion

Diagramme de diffusion d'après l'optique géométrique



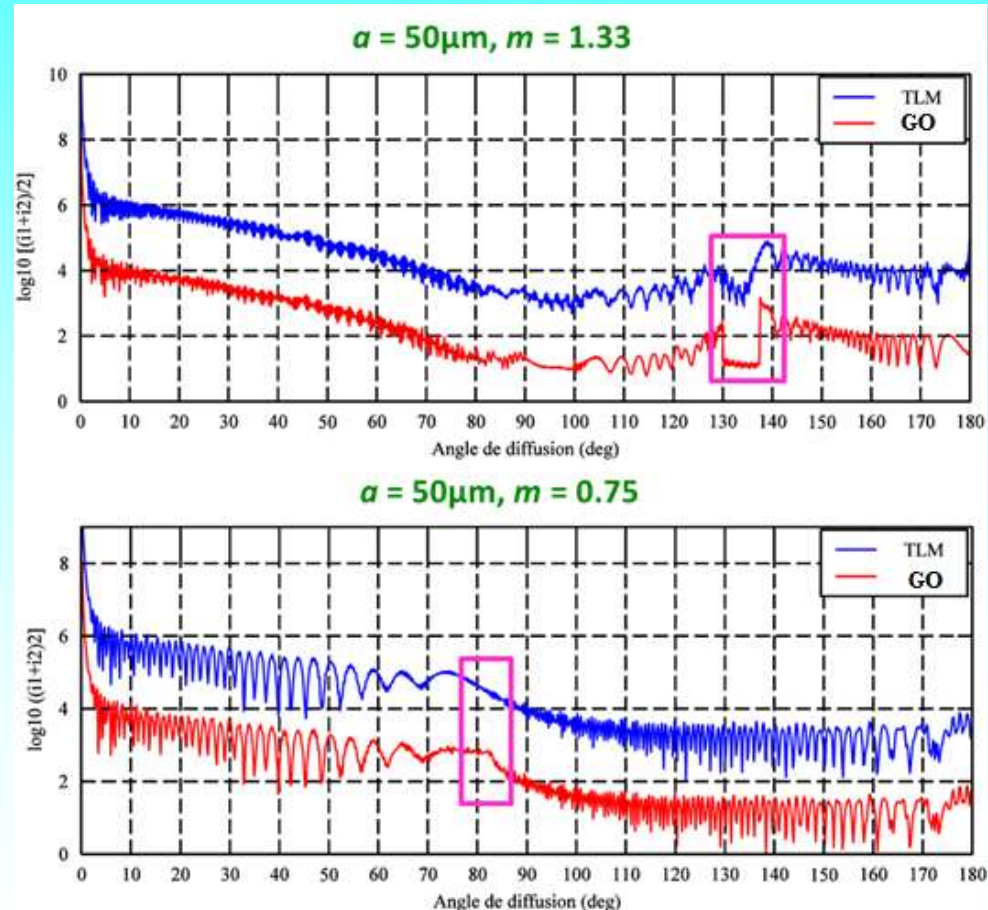
# Optique géométrique – application à la diffusion

## Comparaison avec la théorie rigoureuse

Cas d'une sphère homogène

Intensité totale avec interférence:

Une sphère d'eau ou une bulle d'air dans l'eau éclairée par une onde plane de longueur d'onde de  $0,6328 \mu\text{m}$ .



# Optique géométrique – application à la diffusion

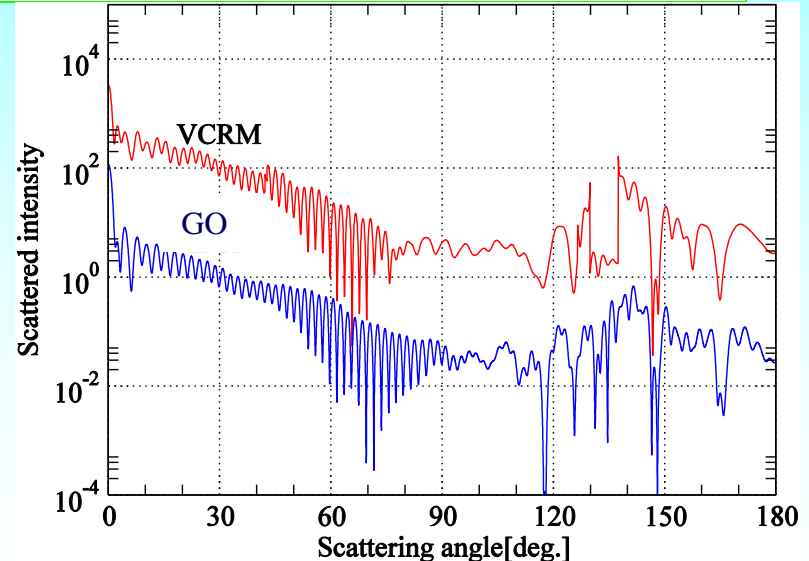
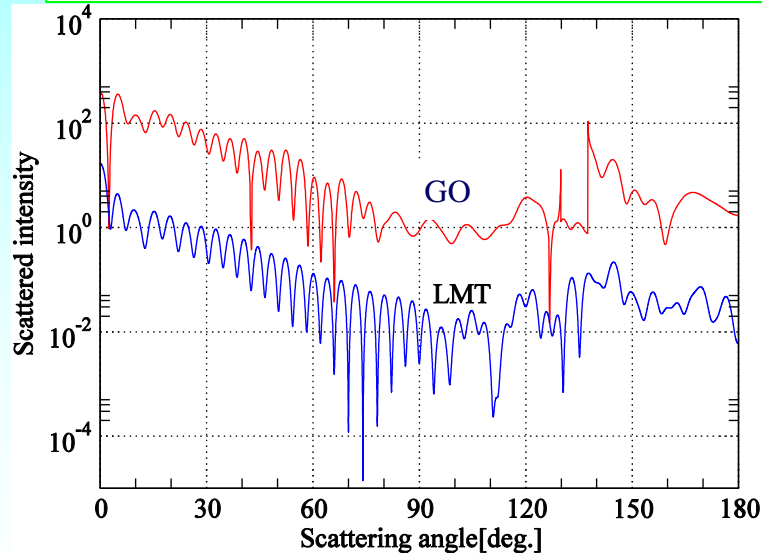
## Comparaison avec la théorie rigoureuse

### Cas d'un cylindre homogène infini

#### Intensité totale avec interférence

Un cylindre circulaire d'eau de rayon de  $5\ \mu\text{m}$  (gauche) ou de  $10\ \mu\text{m}$  (droite) éclairé par une onde plane de longueur d'onde de  $0,6328\ \mu\text{m}$ .

L'optique géométrique marche encore très bien pour  $a \sim 10\lambda$ .



# Optique géométrique – VCRM

## VCRM: Vectorial complex ray model

### Pour un objet de forme irrégulière:

Ren et al, *Opt. Lett.* 2010

#### ➤ Principe:

- Wave and dioptric surface described by their local curvature,
- Ray in vector → easy for 3D tracing,
- Complex Ray (phases) → interference + diffraction.
- Curvature of wave front → divergence and focal lines ,

#### ➤ Advantages:

- Incident wave: arbitrary shape,
- Particle: arbitrary shape with smooth surface,
- Sufficiently precise: Scattering diagram in all direction,
- Prediction of all scattering properties of the scatterer.





# Optique géométrique – VCRM

## Essentiel du VCRM

- **Vectorial complex Ray :**

$$\vec{S}_i = A_i e^{-i\Phi_i} \hat{k}_i$$

- **Wave front – curvature matrix:**

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

- **Surface of dioptry:**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

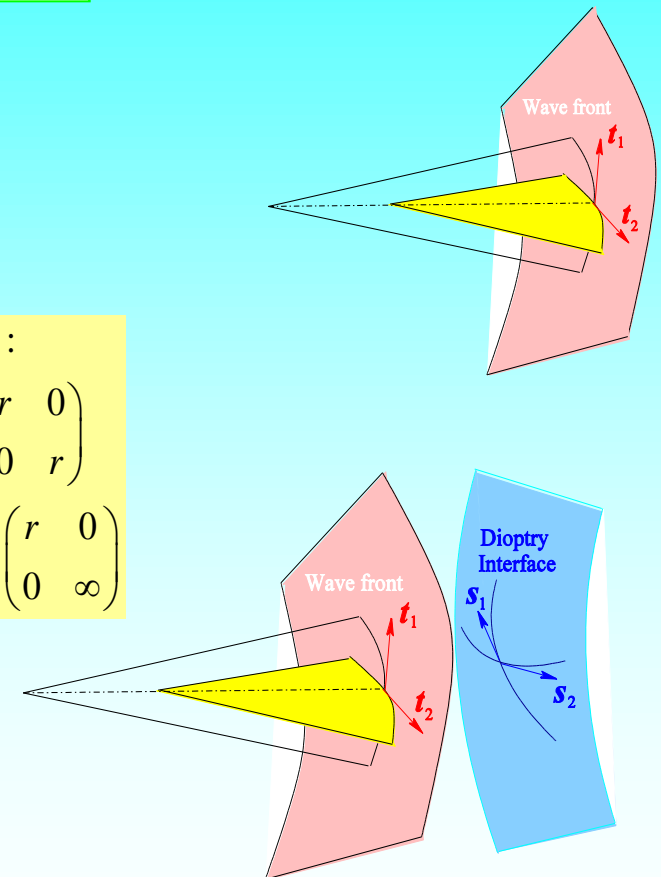
- **Projection matrix:**

$$\Theta = \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \cdot \hat{s}_1 & \hat{t}_1 \cdot \hat{s}_2 \\ \hat{t}_2 \cdot \hat{s}_1 & \hat{t}_2 \cdot \hat{s}_2 \end{pmatrix}$$

Examples :

$$\text{Sphere: } \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$\text{Cylinder: } \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix}$$



# Optique géométrique – VCRM

## Essentiel du VCRM

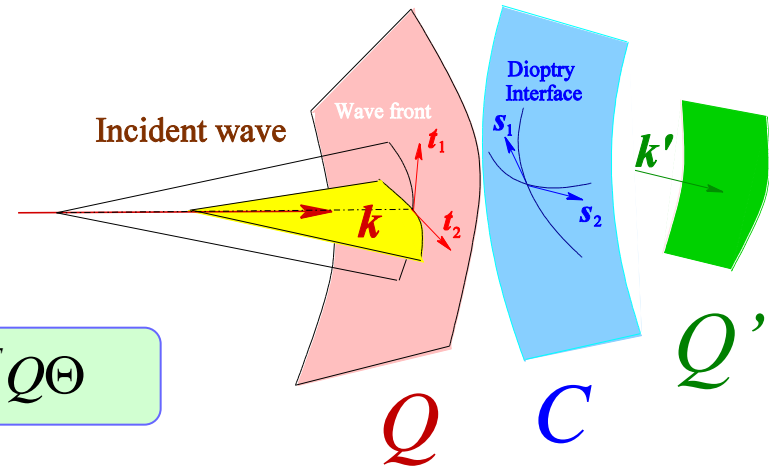
### Fundamental laws:

Snell law:

$$k_{\tau}^i = k_{\tau}^t$$

Wave front equation:

$$(k_n^i - k_n^t)C = k' \Theta'^T Q' \Theta' - k \Theta^T Q \Theta$$



- Amplitude:

$$A = D\varepsilon$$

Divergence factor:  $D = \frac{R_1 R_2}{(d - R_1)(d - R_2)} \dots$

Fresnel coefficients:  $\varepsilon$

- Phase :

$$\Phi = \Phi_{inc} + \Phi_{fl} + \Phi_{path} + (\Phi_{\lambda/2})$$

- Total field:

$$E = S_{diff} + \sum_{i=1}^N S_i$$

# Optique géométrique – VCRM

## Application du VCRM

### Applications to a sphere and a cylinder

#### ■ Sphere

- Reflection:  $R_1 = -\frac{a \cos \alpha}{2}$   $R_2 = -\frac{2}{a \cos \alpha} \rightarrow D = \frac{1}{4}$

- Refraction  $p=1$ :

- After 1<sup>st</sup> refraction:  $R'_{11} = -\frac{am \cos^2 \beta}{m \cos \beta - \cos \alpha}$   $R'_{12} = -\frac{am}{m \cos \beta - \cos \alpha}$

- After 2<sup>nd</sup> refraction:

$$R'_{21} = \frac{m \cos \beta - 2 \cos \alpha}{2(m \cos \beta - \cos \alpha)} \cos \alpha \quad R'_{22} = \frac{2a \cos \beta (m \cos \beta - \cos \alpha) - m}{2(m \cos \beta - \cos \alpha)(\sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta)}$$

- Divergence factor:

$$D = \frac{m \sin(2\alpha) \cos \beta}{4 \sin[2(\beta - \alpha)](\cos \alpha - m \cos \beta)}$$

Identical to the classical one.

#### ■ Cylinder: $R_2 = \infty$

- Reflection:  $D = \frac{a \cos \alpha}{2}$

- Refraction  $p=1$ :  $D = \frac{m \cos \alpha \cos \beta}{2(\cos \alpha - m \cos \beta)}$

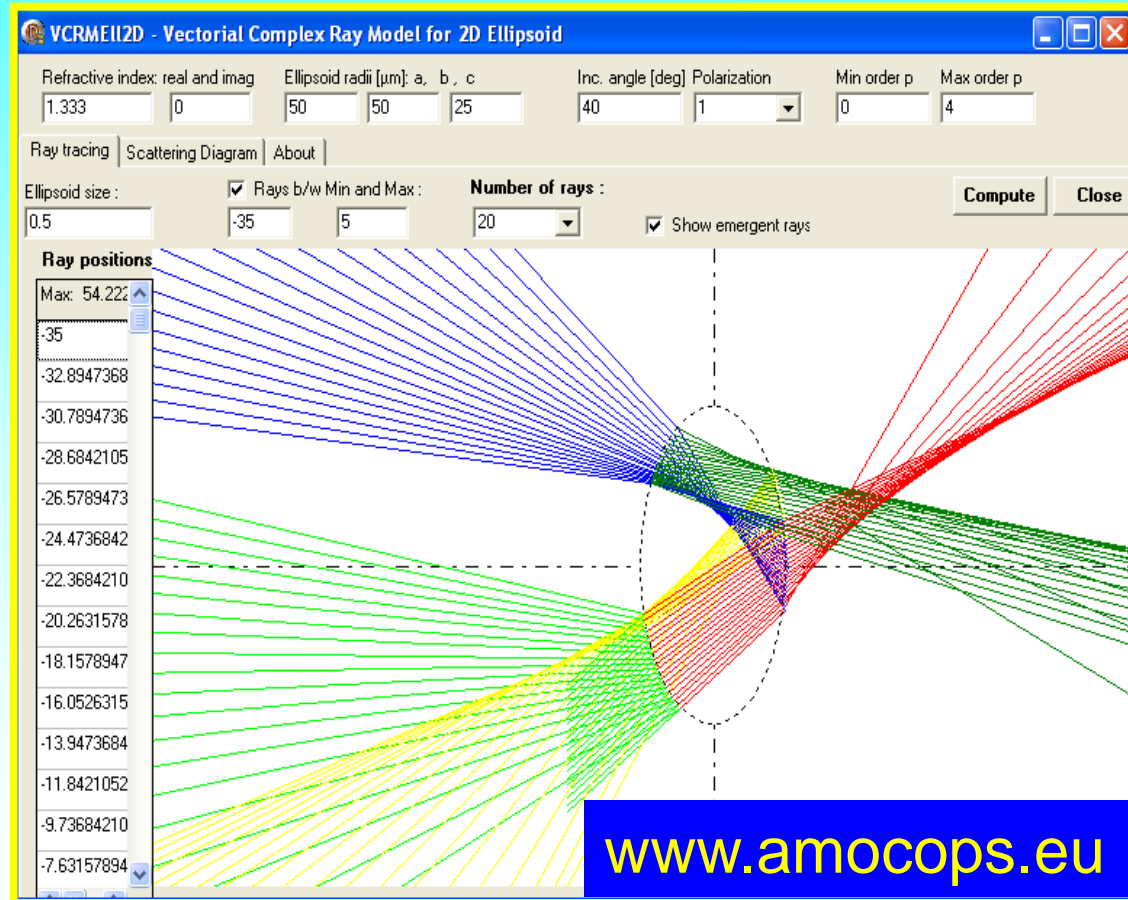
# Optique géométrique – VCRM

## Application du VCRM

### Software for an ellipsoid

#### Ray tracing Module

- Tracing of all the rays or a part of them
- Any number of rays
- Any position of rays



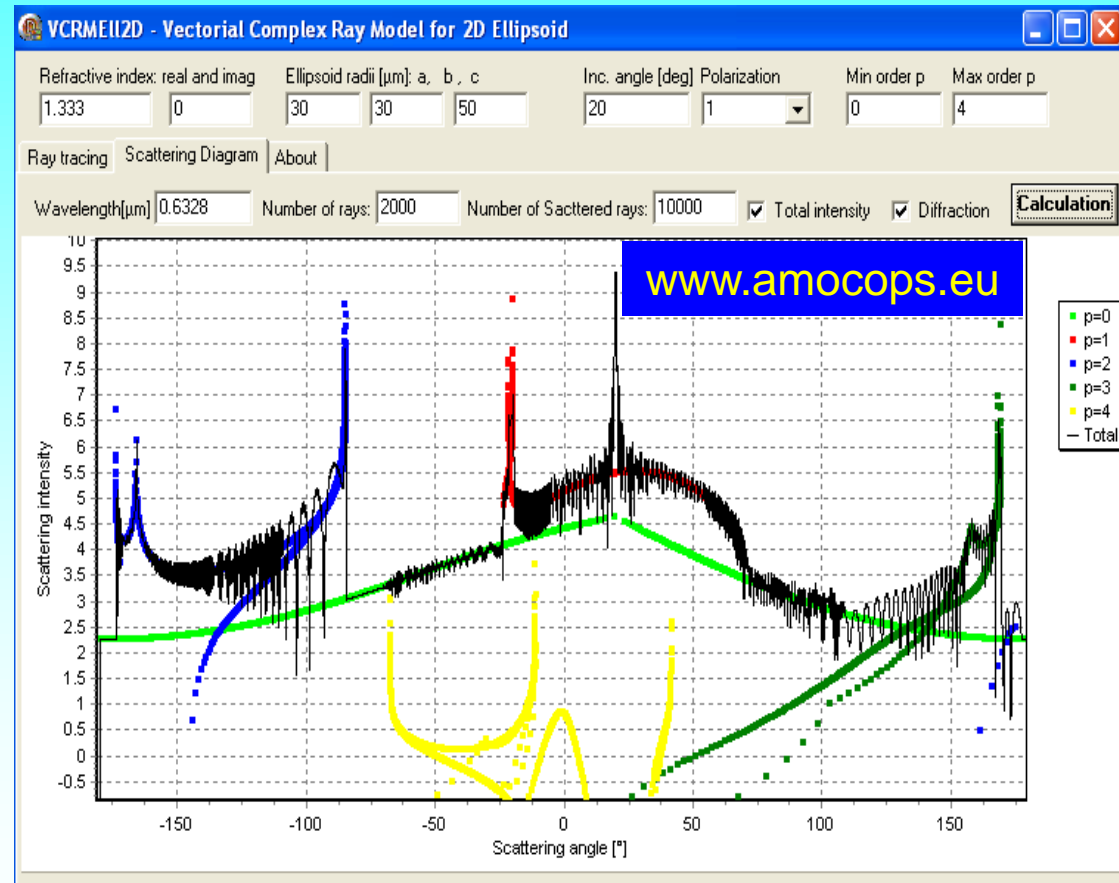
# Optique géométrique – VCRM

## Application du VCRM

### Software for an ellipsoid

Scattering  
diagram  
Module

- Intensité de chaque ordre
- Intensité totale de tous les rayons:
  - Interférence
  - Diffraction



# Optique géométrique – VCRM

## Toward the Ray theory of wave

VCRM can predict much better Airy structure than the Airy theory and can be applied directly to non-spherical particle.

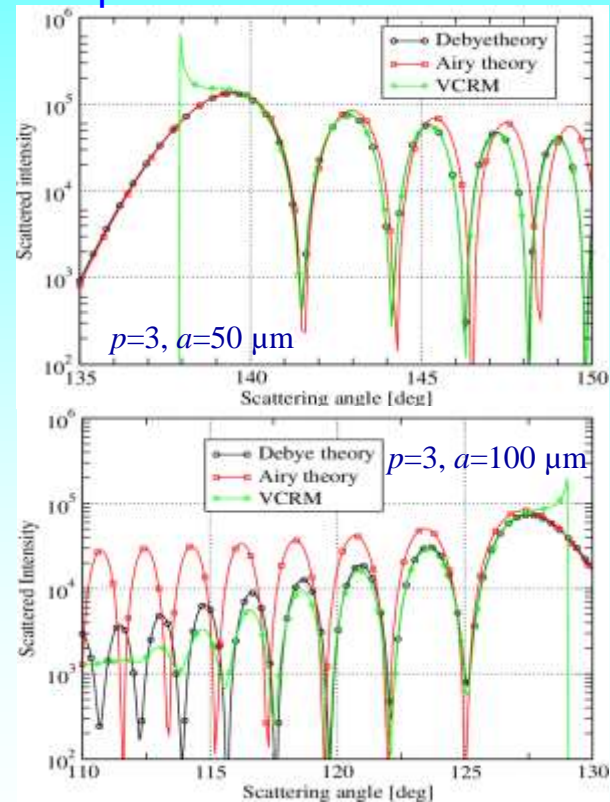
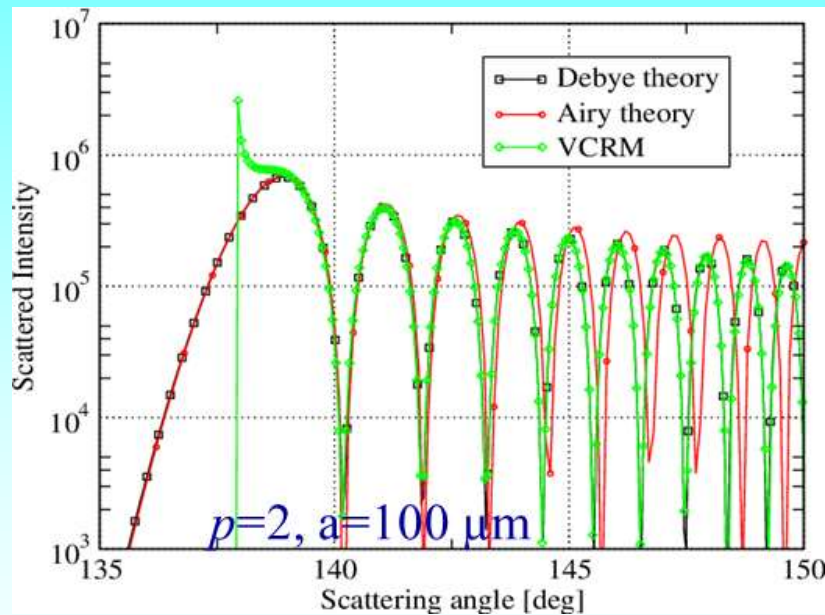


Fig. 3 Comparison of Airy structure calculated with the three methods.

# Optique géométrique – VCRM

## Experimental set-up results

Oblate:

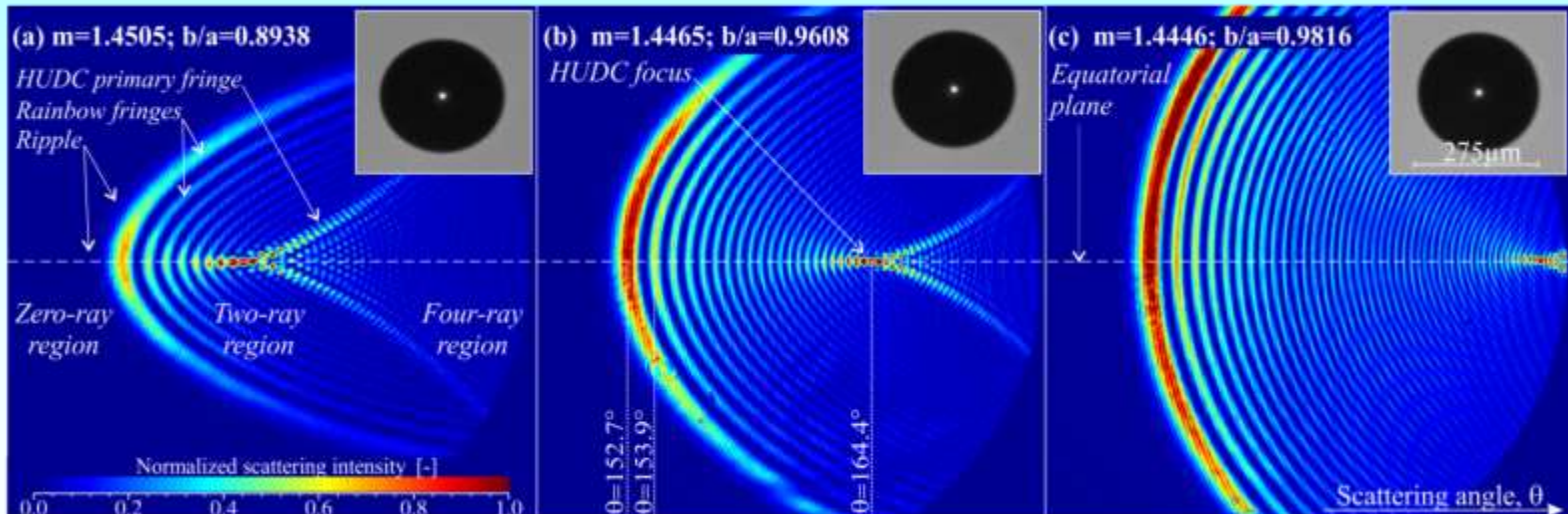
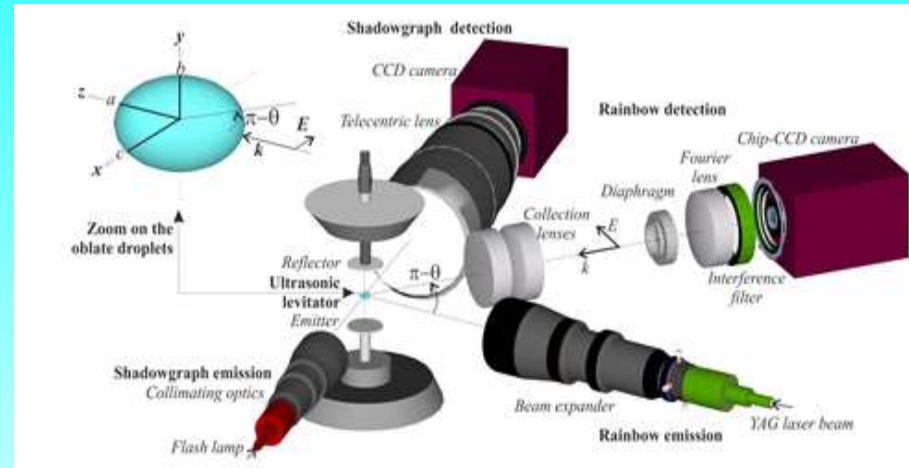
$$a = c = 139.17 \mu\text{m}$$

$$b = 133.86 \mu\text{m},$$

$$a/b = 0.8938, 0.9608, 0.9816 \text{ (eq. Vol)}$$

$$m = 1.4465$$

$$\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$$



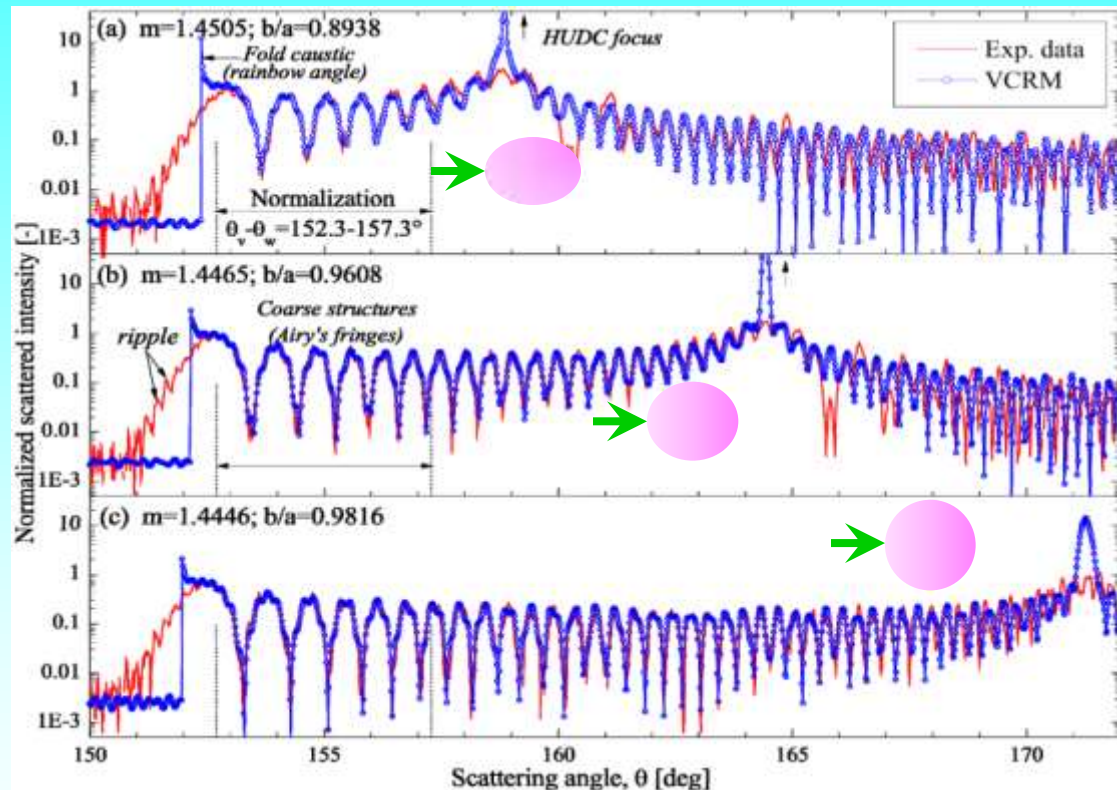
# Results and discussion

## Comparison with VCRM

Fig. 3 in *Opt. Exp.* 2015  
Onofri, Ren *et al*

DEHS:  
Di-Ethyl-Hexyl-  
Sebacat

HUDC:  
Hyperbolic  
Umbilic  
Diffraction  
Catastrophe



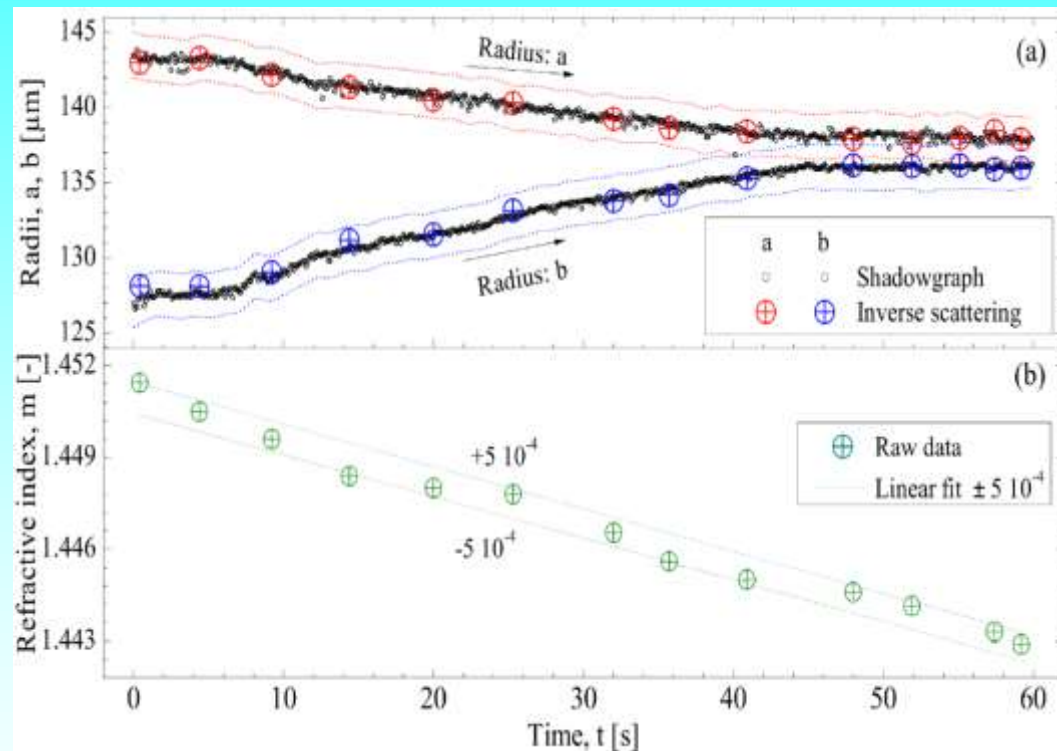
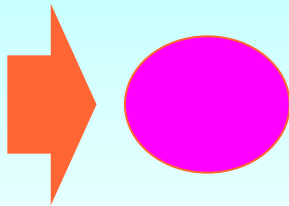
Comparison of VCRM and experimental normalized equatorial scattering diagrams for the droplets of 3 different aspect ratios. From (a) to (c), the droplet's aspect ratio  $b/a$  increases and refractive index decreases when the amplitude of the acoustic field is reduced.



# Results and discussion

## Application to Characterization of non-spherical droplets

- Morphology  
 $(a, b)$
- Refractive index  
 $m$
- Time evolution  
 $a(t), b(t), m(t)$



(a) Principal radii measured with the rainbow refractometry and imaging system and (b) corresponding evolution of the droplet refractive index during the course of the experiment.

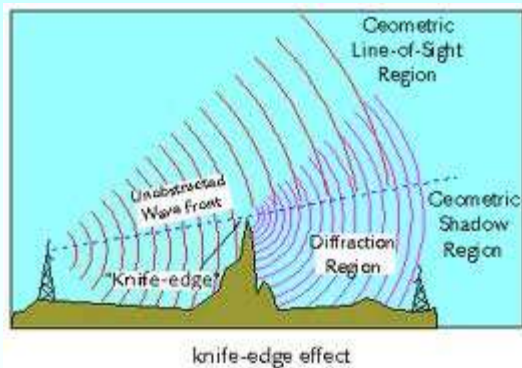
# Diffraction

## Phénomènes de diffraction

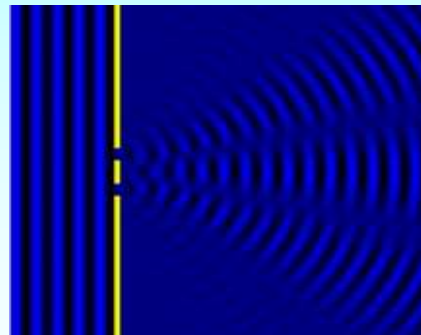
**La diffraction** est le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle.

Le phénomène de la diffraction se manifeste lorsque

- la dimension de l'objet est de l'ordre de la longueur d'onde
- la variation de la densité/amplitude est brutale.



L'onde rencontre un obstacle



Diffraction par deux fentes.



L'effet de diffraction dans l'arc-en-ciel.

# Diffraction

## Théorie de diffraction

### Principe de Huygens –Fresnel

#### (1) La contribution de Huygens (1678)

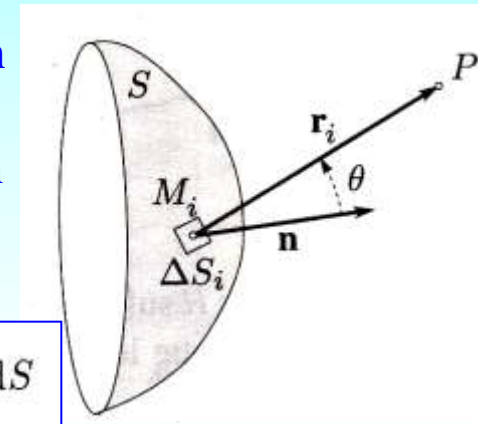
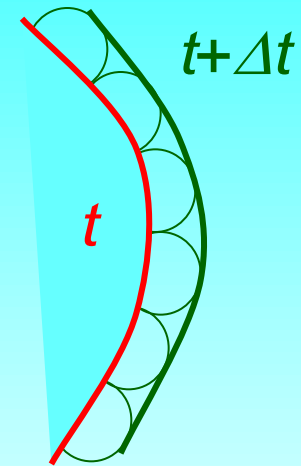
La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément.

#### (2) La contribution de Fresnel (1818)

L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. On dit que toutes ces vibrations interfèrent pour former la vibration au point considéré.

$$\underline{\psi}(P) = \sum_i \underline{\psi}_i(M_i) Q_i \frac{\exp(ikr_i)}{r_i} \Delta S_i$$

$$\underline{\psi}(P) = \int_S \underline{\psi}_0(M) Q \frac{\exp(ikr)}{r} dS$$



# Diffraction

## Théorie de diffraction

On pose  $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$        $r^2 = R^2 + \rho^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{\rho}$

$$r \cong R + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{\xi x + \eta y}{R}$$

$$\psi(M) = Ke^{ikR} \iint_S \psi(P) e^{-ik(\xi x + \eta y)/R} e^{ik(x^2 + y^2)/2R} dS$$

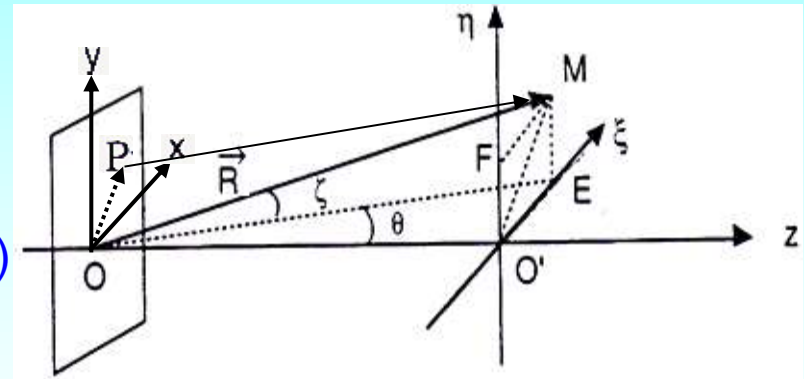
Diffraction de Fresnel ( $R \ll \text{petit}$ ):

$$\psi(M) = Ke^{ikR} \iint_S \psi(P) e^{ik(x^2 + y^2)/2R} dS$$

Diffraction de Fraunhofer ( $R \rightarrow \ll \text{infini} \gg$ ):

$$\psi(M) = Ke^{ikR} \iint_S \psi(P) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dS$$

$$\alpha = \frac{\xi}{R} = \cos\zeta \sin\theta ; \beta = \frac{\eta}{R} = \sin\zeta ; \gamma = \cos\zeta \cos\theta$$



# Diffraction

## Applications de diffraction

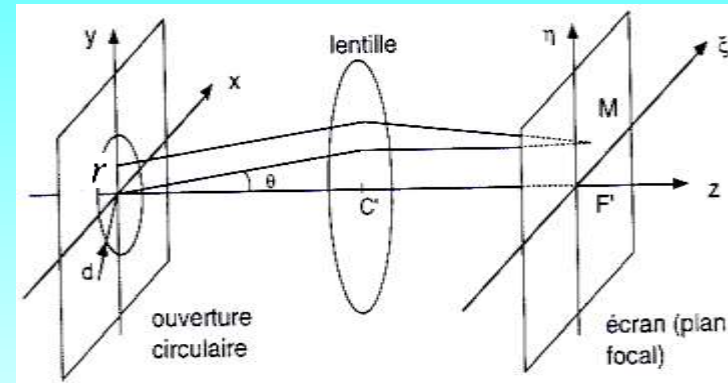
Diffraction par un disque (sphère):

L'ouverture circulaire de rayon  $r$  :

$$x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, dS = dx dy = \rho d\rho d\phi$$

Puisqu'il y a une symétrie de révolution, on peut placer dans un plan passant par l'axe optique:

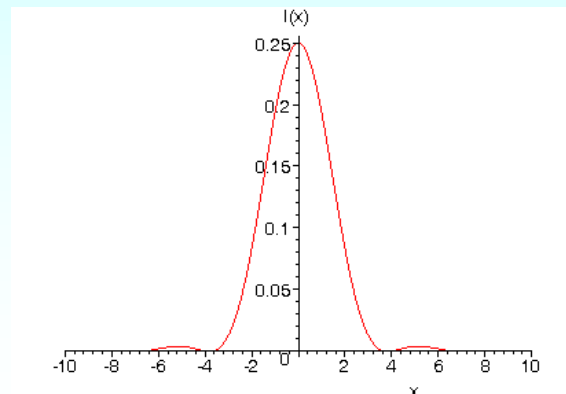
$$\alpha = \sin \theta \text{ et } \beta = 0$$



$$\Psi(\alpha, \beta) = C \iint e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy = C \int_0^{2\pi} \int_0^d e^{-ik \rho \sin \theta \cos \phi} \rho d\rho d\phi = C \frac{J_1(\kappa \sin \theta)}{\kappa \sin \theta}$$

$$I = I_0 \left[ \frac{J_1(\kappa \sin \theta)}{\kappa \sin \theta} \right]^2$$

$$\kappa = 2\pi r / \lambda$$



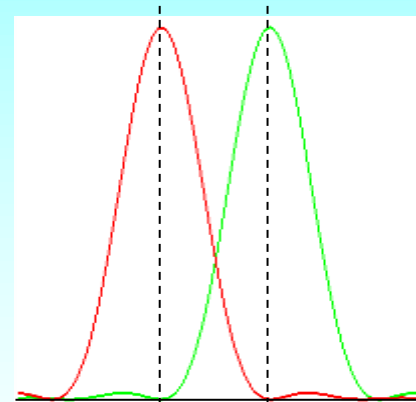
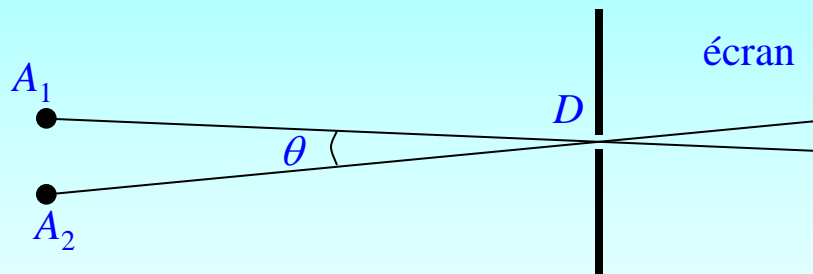
# Diffraction

## Applications de diffraction

### Critère de Rayleigh:

Le premier minimum nul de  $J_1(x)$  s'obtient pour  $x=3.832$ , c'est-à-dire:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$



Donc il est intéressant d'avoir une ouverture importante pour une meilleur résolution (lunette astronomique, appareil photo, ...)

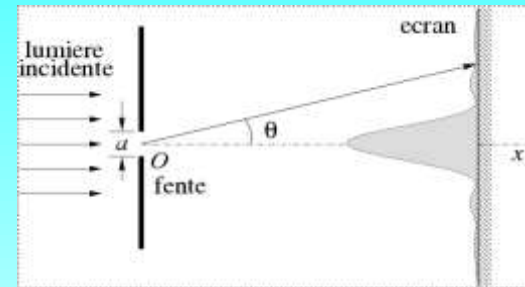
# Diffraction et Interférence

## Applications de diffraction

Diffraction par une fente:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

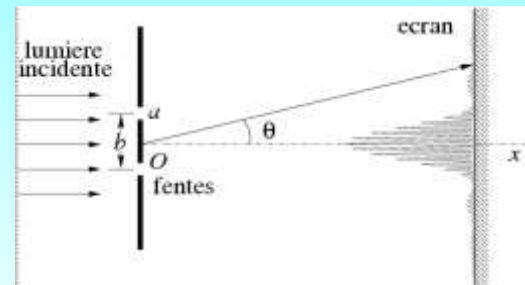
Largeur de la tache centrale:  $L_0 = \frac{2D\lambda}{a}$



Fente d'Yong:  $N=2$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cos^2 \left( \frac{b}{a} u \right)$$

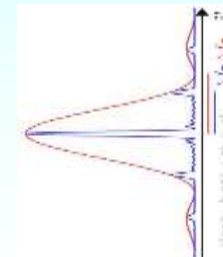
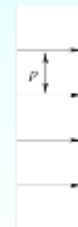
Interfrange :  $i = \frac{D\lambda}{b}$



$N$  fentes:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$$

$$u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}, \quad v = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$$



# Théorie de Rayleigh

## Champ statique d'un dipôle

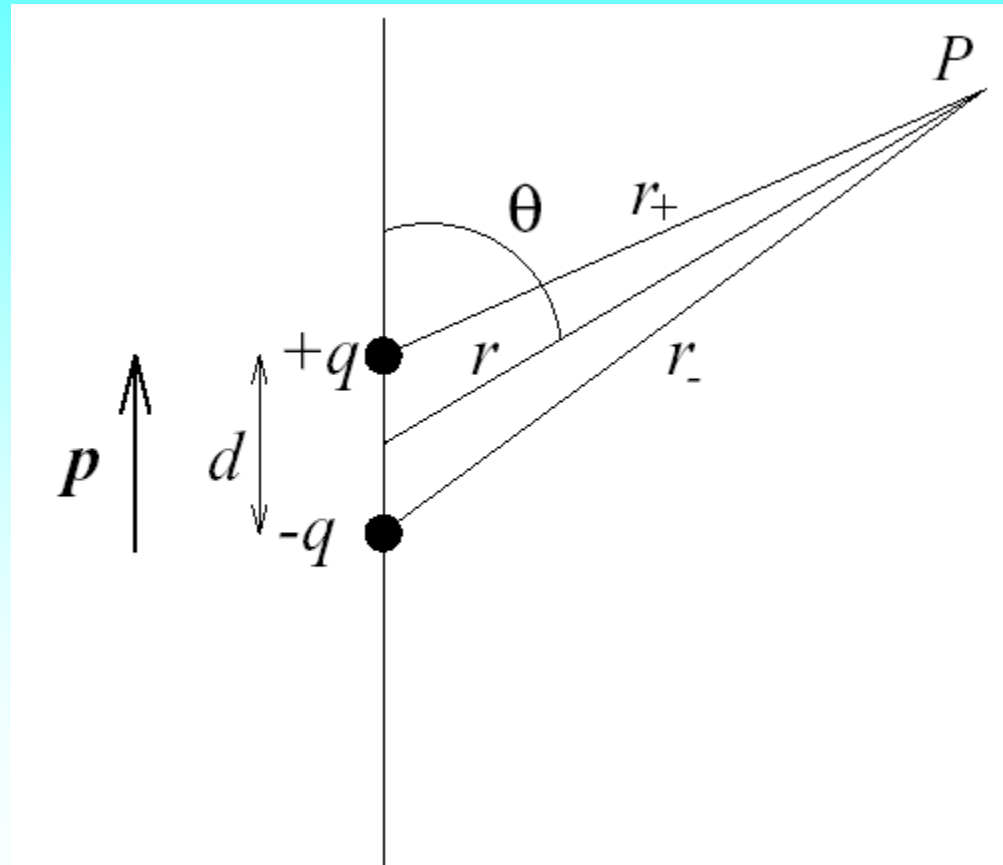
### Champ du dipôle

- Deux charges  $+q$  et  $-q$
- Distant de  $d$ .
- $p=qd$

$$\Phi_{\text{dipôle}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_{\text{ext}}} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\approx \frac{p}{4\pi\epsilon_{\text{ext}} r^2} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r \mp \frac{d}{2} \cos \theta} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$





# Théorie de Rayleigh

## Champ diffusé par un dipôle induit

### Approximation électrostatique

Conditions:

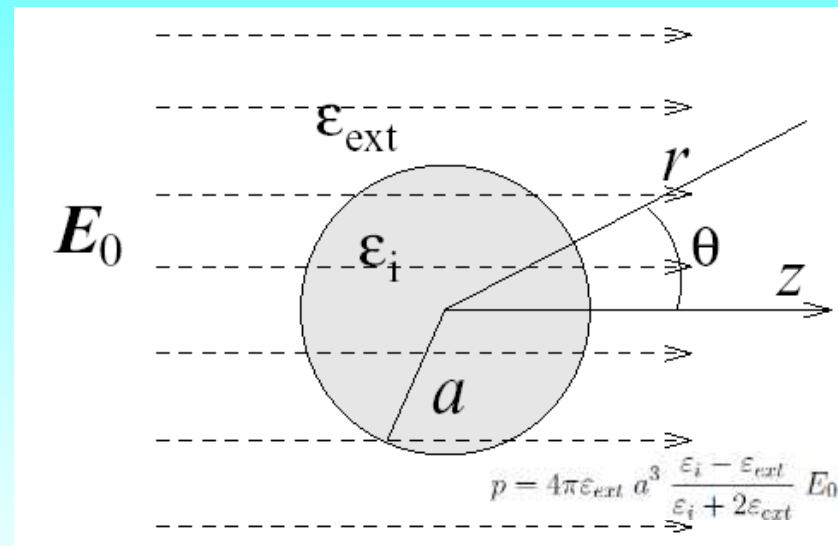
1. Champ électrique
  - statique
  - uniforme
2. Taille de particule  $l \ll \lambda$

Potentiel du champ induit:

$$\varphi_{ext} = \frac{a^3}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{ext}}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_{ext}} E_0 \cos \theta$$

Champ « diffusé »:

$$\vec{E} = \frac{4\pi^2}{r\lambda^2} a^3 \left( \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{ext}}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_{ext}} \right) E_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$$



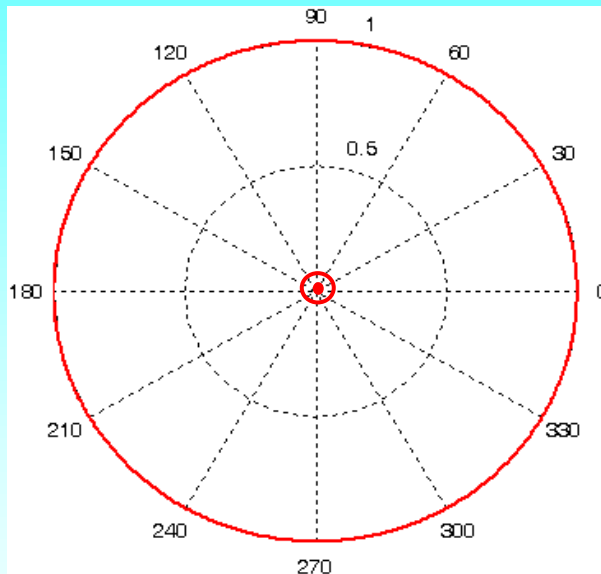
$$d \ll \lambda,$$

$$Q_{ext} = \frac{8}{3} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^4 \operatorname{Re} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)$$

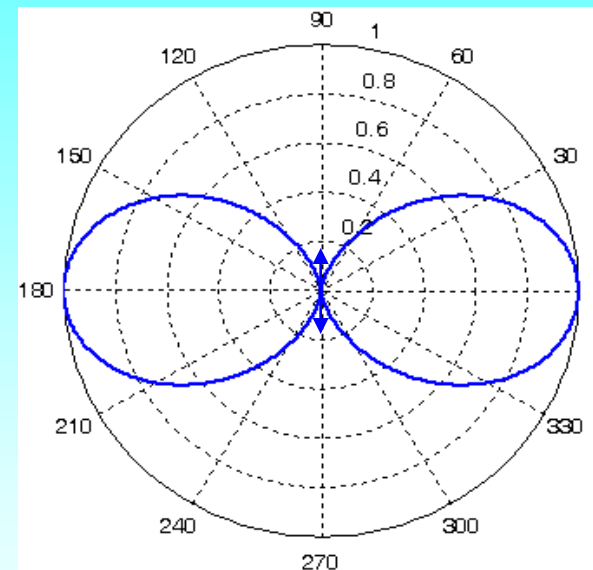
# Théorie de Rayleigh

## Champ diffusé par un dipôle induit

Diagramme de diffusion



Polarisation perpendiculaire



Polarisation parallèle

Éléments de la matrice de diffusion:

$$S_1 = -\frac{ik^3\alpha}{4\pi}$$

$$S_2 = -\frac{ik^3\alpha}{4\pi} \cos\theta$$

# Théorie de Rayleigh-Gans

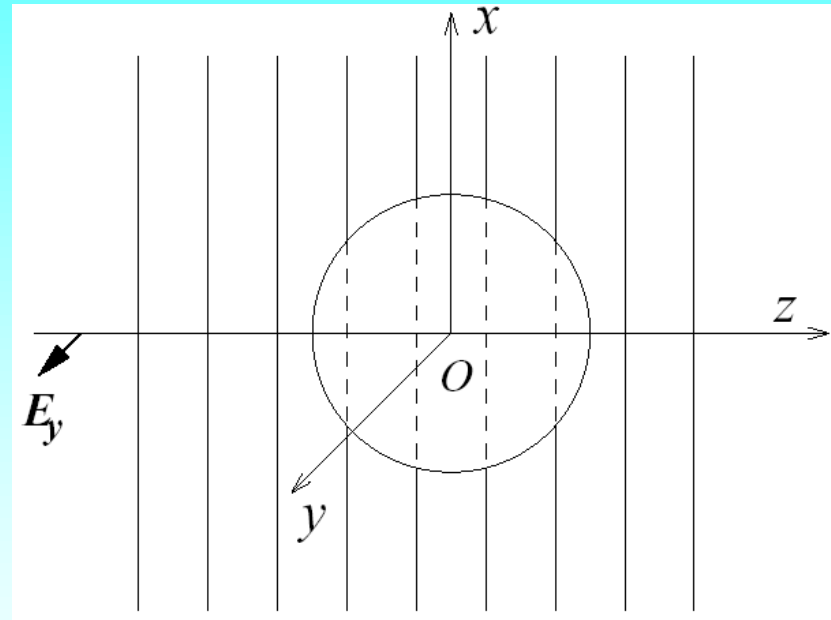
## Conditions et principe

### Conditions:

1. Onde incidente plane
2. Indice de réfraction  $m \sim 1$ :
  - $\frac{\pi d}{\lambda} |m-1| \ll 1$
  - $|m-1| \ll 1$
3. Surface d'égale phase plane

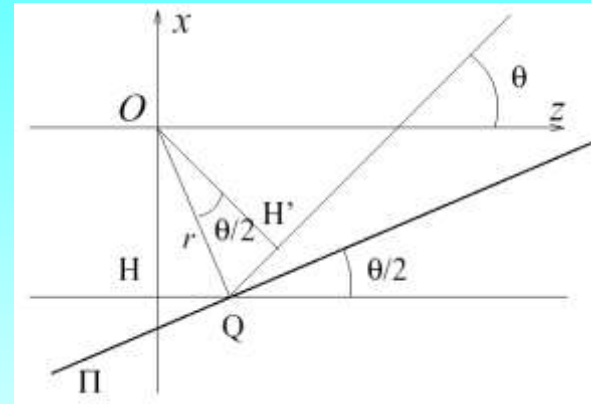
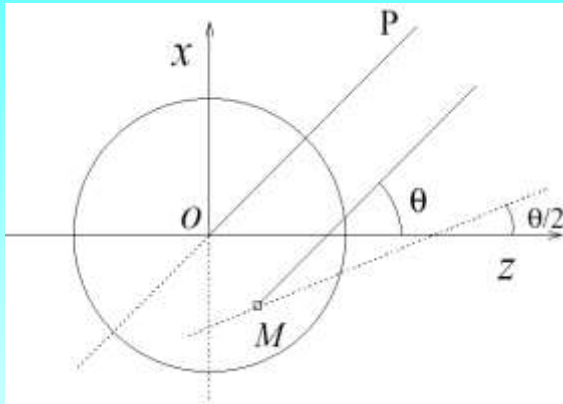
### Principe:

1. Chaque élément de volume  $dV$  est considéré comme un dipôle induit par l'onde incident
2. Champ diffusé est la somme des champs émis par tous les dipôles



# Théorie de Rayleigh - Gans

## Théorie



$$dV = \pi(a^2 - r^2)dr \quad \frac{3\pi(m^2 - 1)}{\lambda^2(m^2 + 2)} \approx \frac{\pi(m^2 - 1)}{\lambda^2} \text{ car } m^2 + 2 \approx 3$$

$$\int_{-a}^a (a^2 - r^2) \cos(br) dr = 4[\sin(ab) - ab \cos(ab)] / b^3$$

Contribution d'un élément  $dV$  à l'amplitude du champ diffusé:

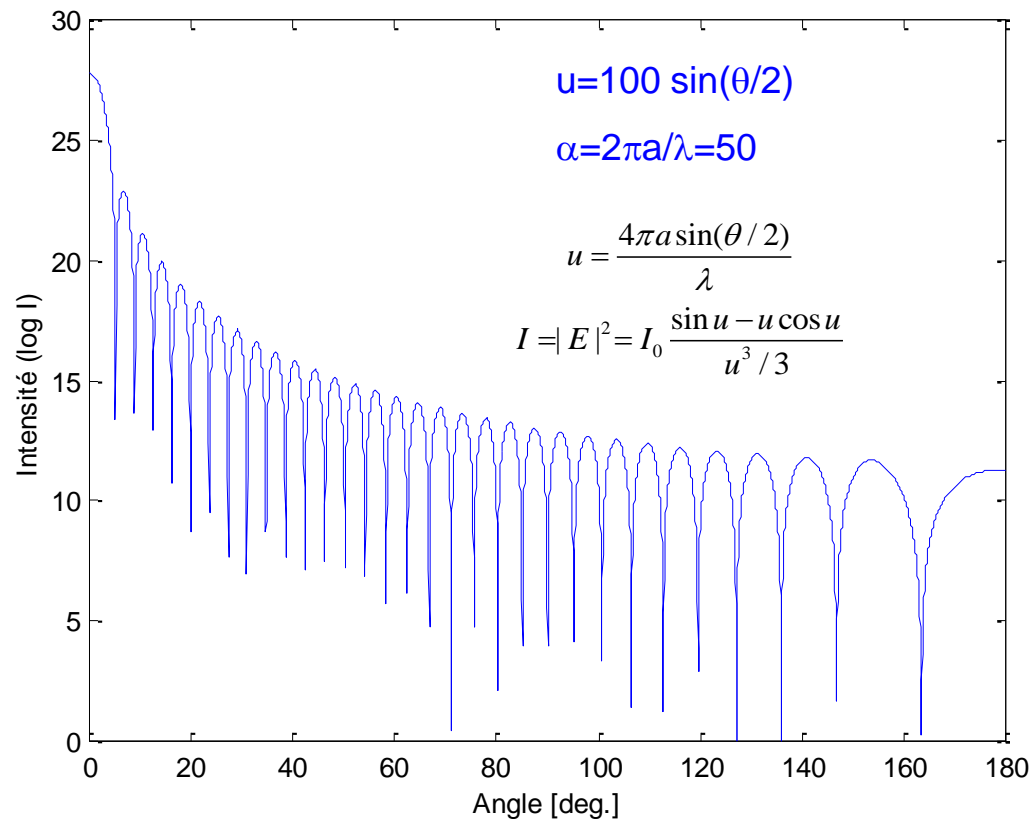
$$dA = \frac{\pi(m^2 - 1)}{\lambda^2} dV \times \text{terme de phase} = \frac{\pi(m^2 - 1)}{\lambda^2} dV \sin 2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{2r \sin \theta/2}{\lambda} \right] \quad u = \frac{4\pi a \sin(\theta/2)}{\lambda}$$

Champ total en  $P$ :

$$E = \frac{\pi^2(m^2 - 1)}{\lambda^2} \int_{r=-a}^{r=+a} (a^2 - r^2) \sin \left( 2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{2r \sin \theta/2}{\lambda} \right] \right) dr = \frac{v\pi(m^2 - 1)}{\lambda^2} \left( \frac{\sin u - u \cos u}{\frac{1}{3}u^3} \right)$$

# Théorie de Rayleigh -Gans

## Diagramme de diffusion selon Rayleigh-Gans



# Théorie de Lorenz-Mie

## Conditions et principe

### Conditions:

1. Onde incidente plane
2. Particule :
  - Sphérique
  - Homogène ou stratifiée concentrique
  - Isotrope

### Champs EM:

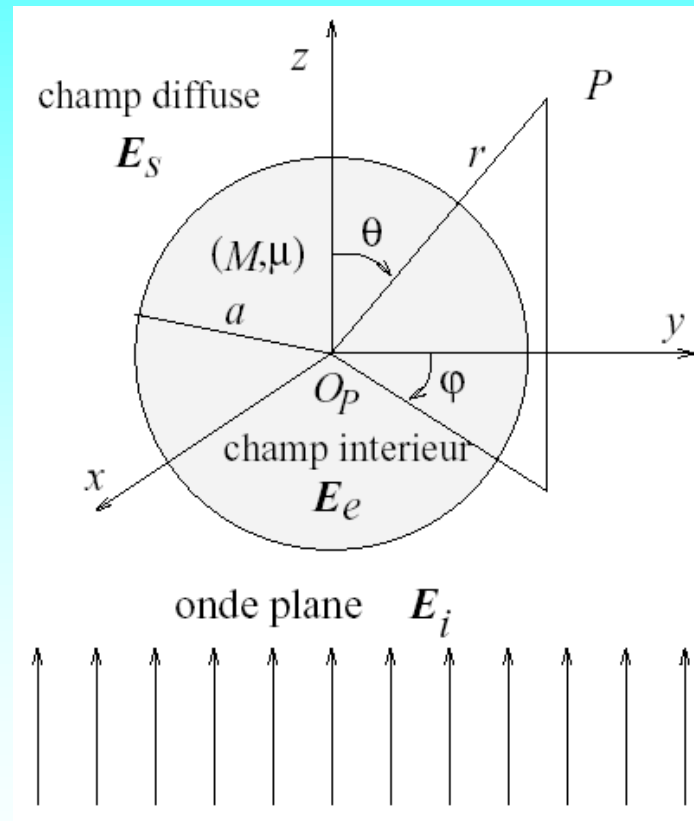
$$E_n = A_n R_n(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

$$H_n = B_n R_n(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

### Conditions aux limites:

$$E_{i,\theta} + E_{s,\theta} = E_{e,\theta}$$

$$H_{i,\theta} + H_{s,\theta} = H_{e,\theta}$$



# Théorie de Lorenz-Mie

## Conditions et principe

**Champ incident:**

$$\begin{pmatrix} U_{TM}^i \\ U_{TE}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

**Champ diffusé (lointain):**

$$E_r = H_r = 0$$

$$E_\theta = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + ib_n \pi_n(\cos \theta)] = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) \cos \varphi S_2$$

$$E_\varphi = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + ib_n \tau_n(\cos \theta)] = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) \sin \varphi S_1$$

$$H_\varphi = \frac{H_0}{E_0} E_\theta$$

$$H_\theta = -\frac{H_0}{E_0} E_\varphi$$

$a_n, b_n$  coefficients de diffusion dépendants des propriétés de la particule

$\tau_n, \pi_n$  fonctions angulaire de Legendre

$S_1, S_2$  éléments de la matrice de diffusion

# Théorie de Lorenz-Mie

## Grandeurs physiques

### Intensités de diffusion:

$$I_{\perp}(\theta) = |S_1|^2$$

$$I_{\parallel}(\theta) = |S_2|^2$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + ib_n \tau_n(\cos \theta)]$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + ib_n \pi_n(\cos \theta)]$$

### Sections efficaces:

$$C_{ext} = C_{sca} + C_{abs}$$

$$C_{sca} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$C_{ext} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n)$$

### Pression de radiation:

$$C_x = C_y = 0$$

$$C_{pr,z} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{(a_n + b_n)}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n b_n^* - \frac{n(n+2)}{n+1} (a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*) \right]$$



# Théorie de Lorenz-Mie Généralisée

## Conditions et principe

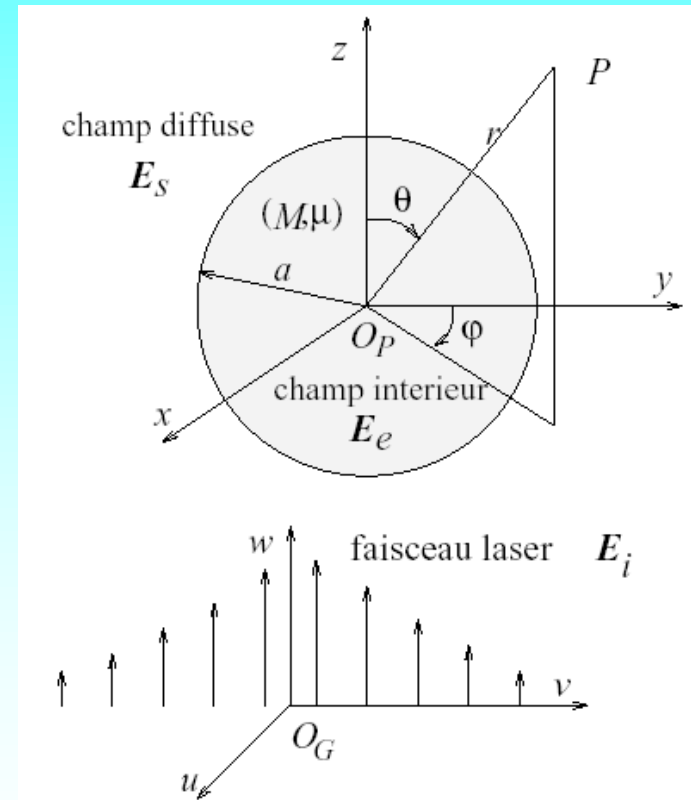
### Conditions:

1. Onde incidente *quelconque*
2. Particule :
  - Sphérique
  - Homogène ou stratifiée concentrique
  - Isotrope

### Particularités:

1. Lorsque l'objet est grand, l'éclairage n'est plus uniforme
2. Faisceau incident est décrit par deux séries de coefficients :

$$g_{n,TM}^m \quad \text{et} \quad g_{n,TE}^m$$



# Théorie de Lorenz-Mie Généralisée

## Expressions du champ diffusé

Champs diffusés:

$$E_\theta = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) S_2 \exp(im\varphi)$$

$$E_\varphi = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) S_1 \exp(im\varphi)$$

$$H_\varphi = \frac{H_0}{E_0} E_\theta$$

$$H_\theta = -\frac{H_0}{E_0} E_\varphi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=+n}$$

$$a_n \rightarrow a_n g_{n, TM}^m$$

$$b_n \rightarrow b_n g_{n, TE}^m$$

$$\pi_n(\cos \theta) \rightarrow \pi_n^m(\cos \theta)$$

$$\tau_n(\cos \theta) \rightarrow \tau_n^m(\cos \theta)$$

Éléments de matrice de diffusion:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n \left[ m a_n g_{n, TM}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + i b_n g_{n, TE}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) \right]$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n \left[ a_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + i m b_n g_{n, TE}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right]$$

# Théorie de Lorenz-Mie Généralisée

## Champs diffusés – onde plane/faisceau gaussien

**Particule :**

$$a = 5 \mu\text{m}$$

$$m = 1.33$$

**Faisceau gaussien:**

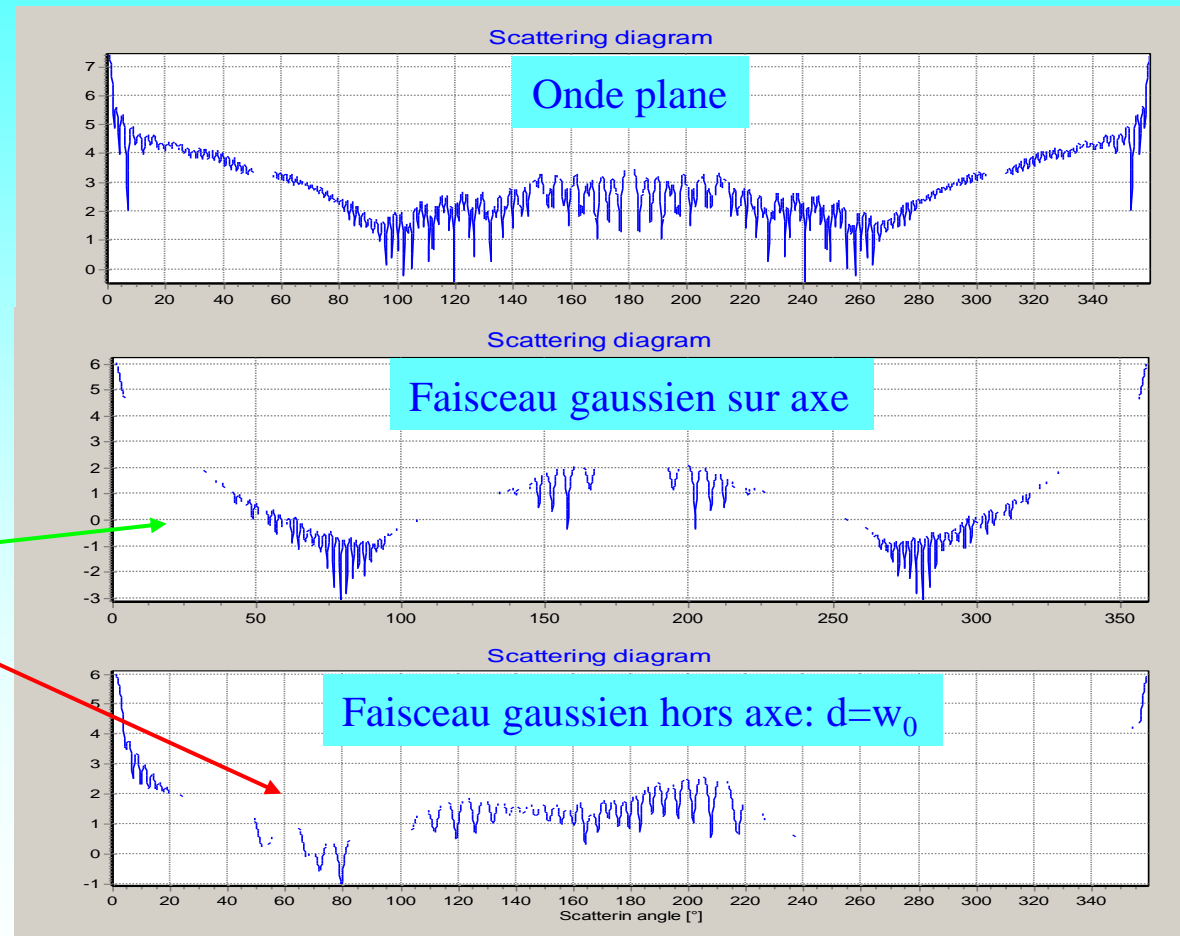
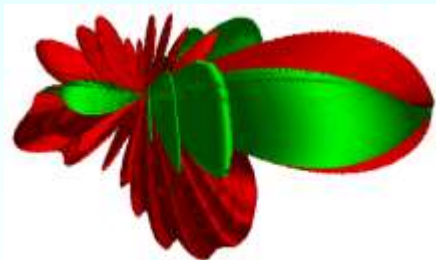
$$\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$$

$$w_0 = 5 \mu\text{m}$$

**Diagramme de diffusion:**

Sur axe - symétrique

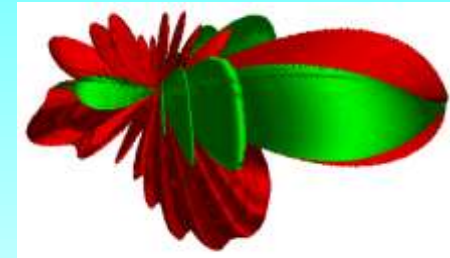
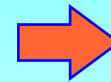
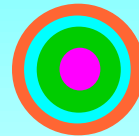
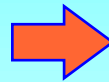
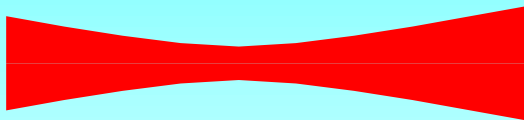
Hors axe - non-symétrique



# TLM et TLMG pour la sphère

## Structure de la TLMG

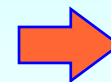
Cas d'une sphère



$$\begin{array}{c} E_i \\ H_i \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} g_{n,TM}^m \\ g_{n,TE}^m \end{array}$$



$$\begin{array}{c} a_n \\ b_n \end{array}$$



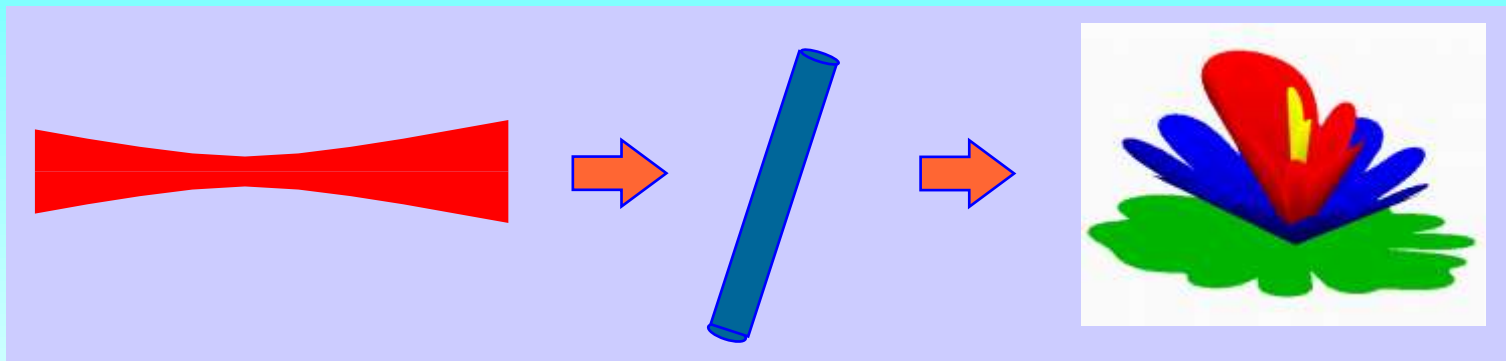
$$\begin{array}{cc} E_s & I \\ H_s & P \end{array}$$

# GLMT pour le cylindre

*Théorique et numérique*

## Structure de la TLMG

Cas d'un cylindre



$$\begin{array}{c} E_i \\ H_i \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} I_{n, TM}(\gamma) \\ I_{n, TE}(\gamma) \end{array} + \begin{array}{c} a_{nI}, a_{nII} \\ b_{nI}, b_{nII} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} E_s \\ H_s \end{array} I$$

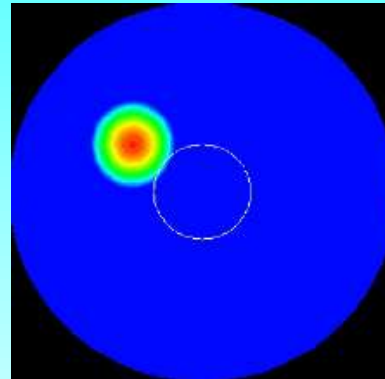
**Introduction de la méthode spectrale**

# Diffusion d'un pulse par une sphère

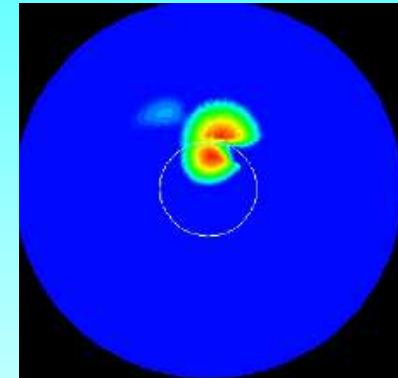
Diffusion d'une impulsion ultra rapide

## Champs internes

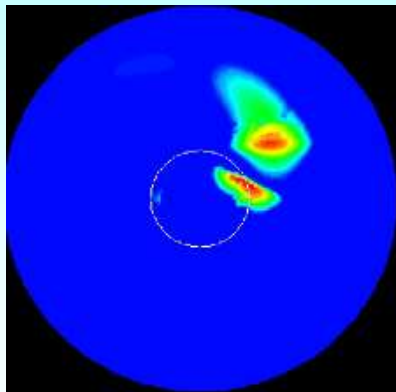
*Sphère homogène*  
 $d=40\ \mu\text{m}$ ,  $\tau=50\ \text{fs}$   
*Faisceau gaussien*



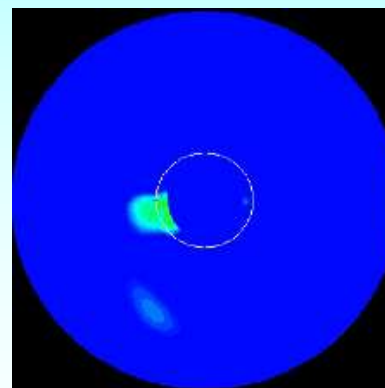
$t = -120$



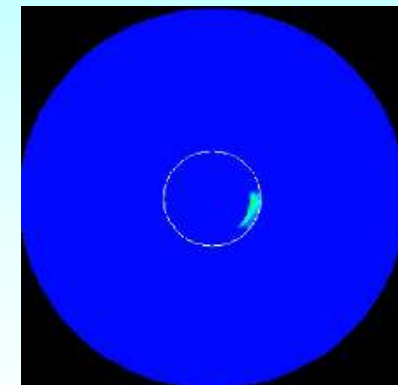
$t = 20$



$t = 120$



$t = 1080$



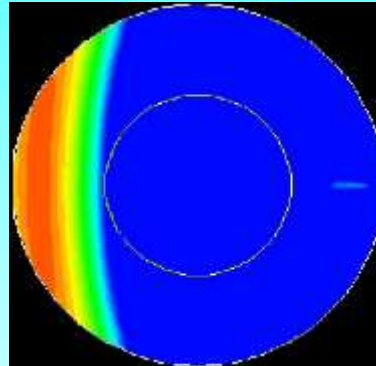
$t = 3400$

# Diffusion d'un pulse par une sphère

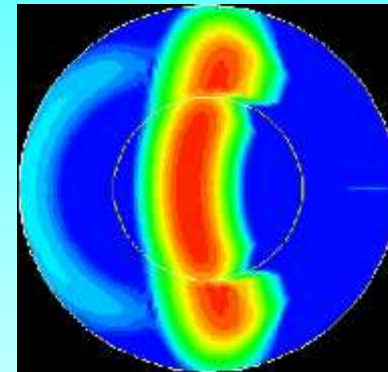
## Diffusion d'une impulsion ultra rapide

### Champs internes

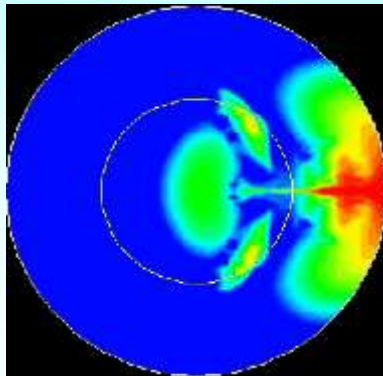
*Sphère à 2 couches*  
 $d_e=40\ \mu\text{m}$ ,  $d_i=20\ \mu\text{m}$   
 $\tau=50\ \text{fs}$   
*Onde plane*



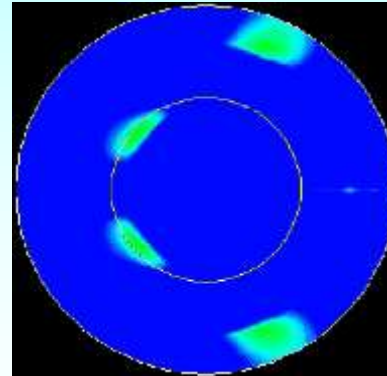
$t = -120$



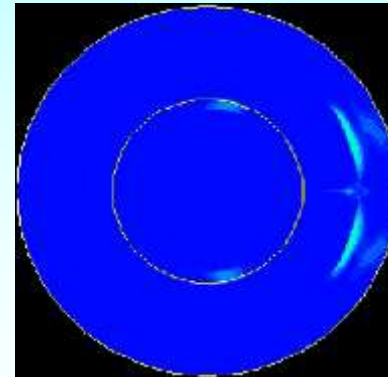
$t = 20$



$t = 120$



$t = 1060$



$t = 3400$

# Diffusion d'un pulse par une sphère

Diffusion d'une impulsion ultra rapide

