

# Métrologie diphasique

# Métrologie des particules

Partie 1 : Généralité

---

*Kuan Fang REN*

**UMR 6614/ CORIA**  
**CNRS - INSA et Université de Rouen**

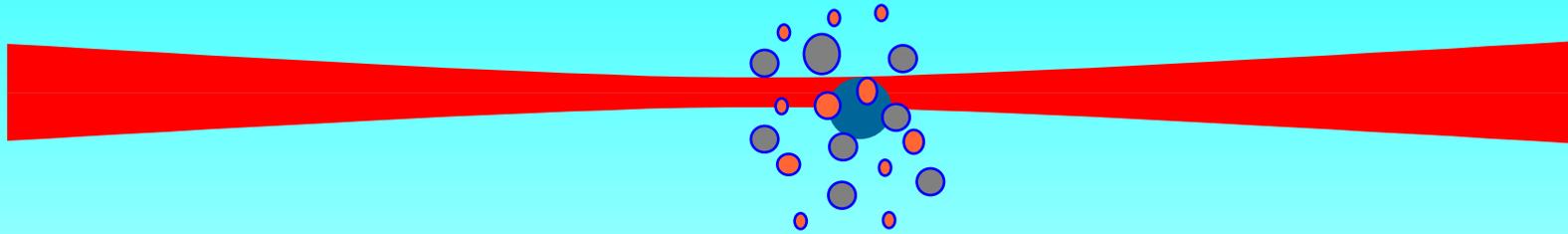


# Plan du cours

---

- Introduction
- Généralité
- Théories de diffusion de la lumière
  - Théories approchées
  - Théories rigoureuses
  - Méthodes numériques
- Techniques de mesure
  - LDV, PDA
  - Imagerie
  - Réfractomètre
  - Turbidimétries
- Thèmes de recherche

# Introduction



➤ Diffusion élastique

➤ Diffusion non-élastique

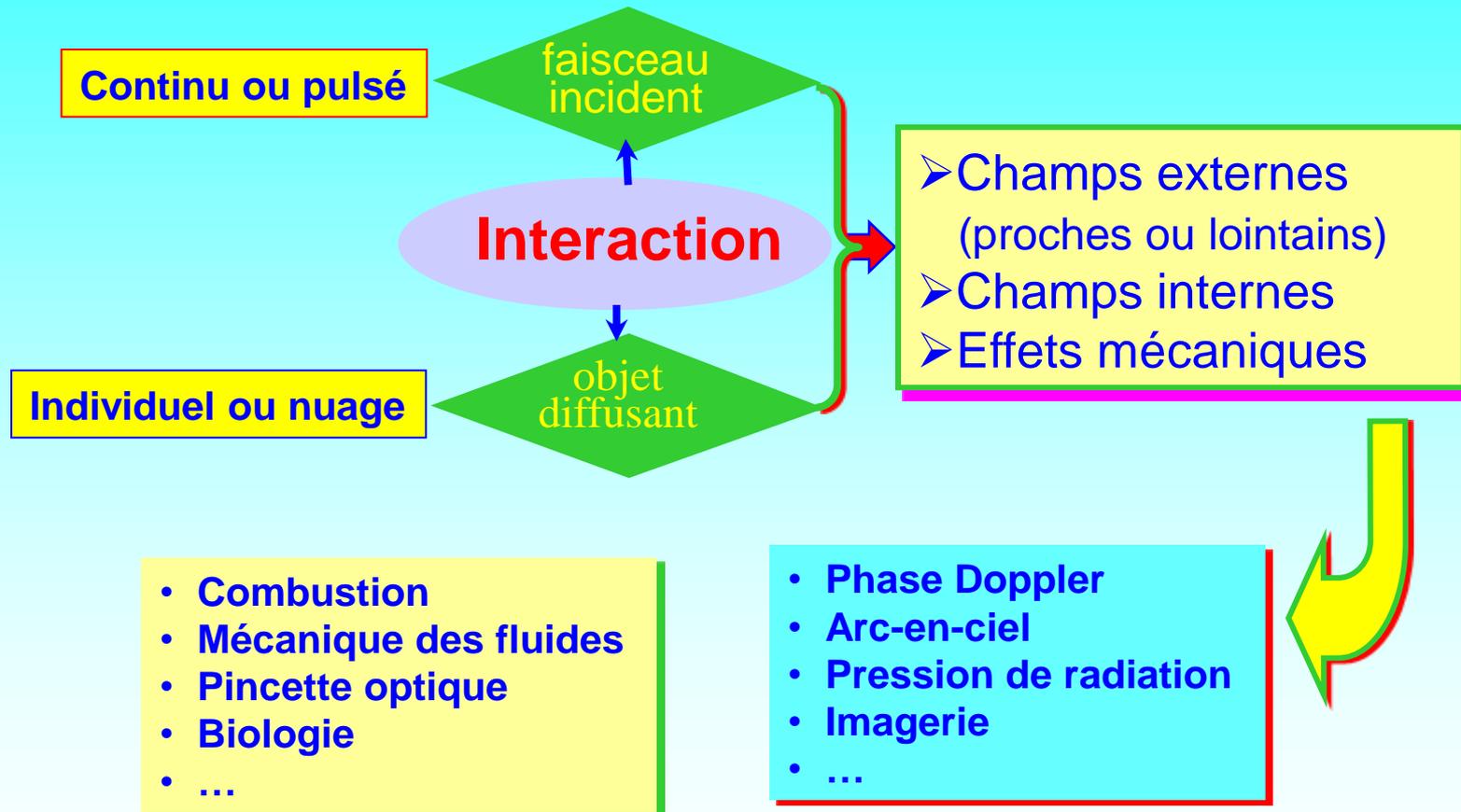
➤ Diffusion simple

➤ Diffusion multiple

➤ Diffusion cohérente



# Introduction



# Introduction - Théories

## ➤ Théories approchées:

- Rayleigh:  $l \ll \lambda$
- Diffraction:  $l \sim \lambda$
- Optique géométrique:  $l \gg \lambda$
- VCRM – Vectorial Complex Ray Model
- Rayleigh-Gans:  $|m - 1| \ll 1$
- GTD - Geometrical Theory of Diffraction,

## ➤ Théories rigoureuses:

- TLM – Théorie de Lorenz-Mie
- TLMG - Théorie de Lorenz-Mie généralisée

## ➤ Méthodes numériques

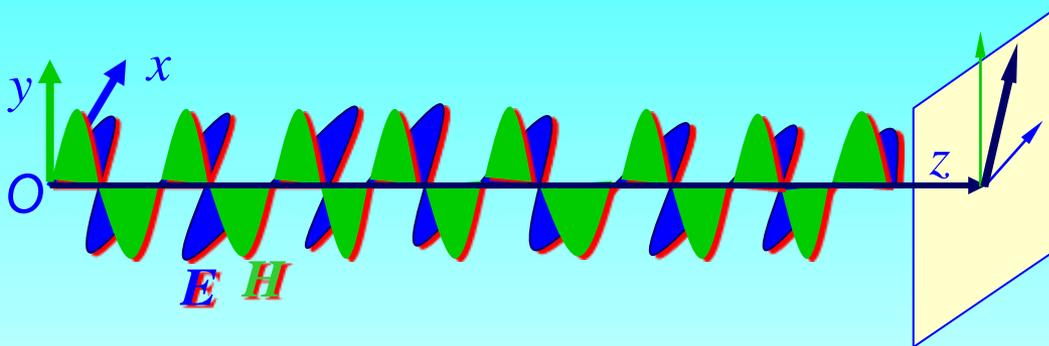
- T-Matrices,
- DDA - Dipole discretization Approximation (ADDA, DDSCAT)
- FDTD - Finite-difference time-domain
- MoM – Method of Moment
- FEM – Finite Element Method

# Introduction – Techniques de mesure

- **ADL – PDA:**
  - ✓ *vitesse, taille*
  - ✓ *particule individuelle*
- **Imagerie (PIV, HPIV, ...):**
  - ✓ *taille, vitesse*
  - ✓ *particule individuelle ou nuage*
- **Réfractomètre d'arc-en-ciel:**
  - ✓ *Taille, indice très précis*
  - ✓ *grosse particule*
- **Turbidimétrie**
  - ✓ *Taille, concentration*
  - ✓ *petites particules ( $d \sim \lambda$ )*

# Généralité – Onde plane

## Champs électromagnétique (EM) et ces propriétés



Front d'onde = plans  $\parallel$  xOy  
Vecteur d'onde  $\perp$  E et H

Vecteur d'onde :  $\mathbf{k}$

Nombre d'onde :  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Deux polarisations:  $\begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_0) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_0) \end{cases}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)} \quad (\text{fonction complexe})$$

Dans un milieu homogène isotrope:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu \omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$  – champ électrique

$\mathbf{H}$  – champ magnétique

$\varepsilon$  – permittivité

$\mu$  – perméabilité

# Généralité – Indice de réfraction complexe

## Définition et sens physique de l'indice de réfraction

Indice de réfraction complexe:  $\tilde{m}^2 = \varepsilon$

$$\tilde{m} = m_r - m_i \cdot i$$

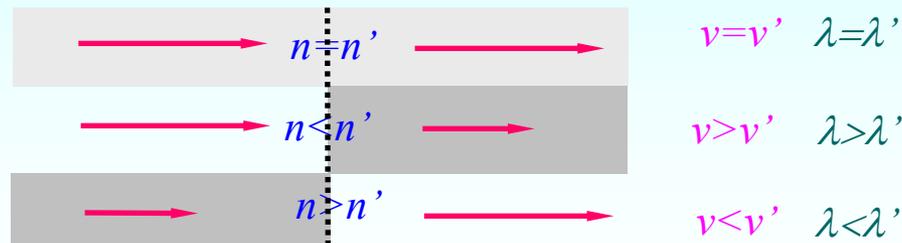
Partie réelle – vitesse :  $m_r = \frac{c}{v}$

### Exemples:

Dans le vide (air):  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\lambda = 0,6328 \text{ } \mu\text{m}$

$n_{\text{eau}} = 1,33$      $v_{\text{eau}} = 2,26 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\lambda_{\text{eau}} = 0,4758 \text{ } \mu\text{m}$

$n_{\text{verre}} = 1,5$      $v_{\text{verre}} = 2,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\lambda_{\text{verre}} = 0,4219 \text{ } \mu\text{m}$



# Généralité – Indice de réfraction complexe

## Définition et sens physique de l'indice de réfraction

Partie imaginaire - **absorption**:

Profondeur de pénétration: 
$$d = \frac{1}{m_i k_0} = 0.16 \frac{\lambda}{m_i}$$

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(\omega t - m k_0 z + \phi)} \\ &= E_0 e^{i\omega t - i m_r k_0 z - m_i k_0 z + i\phi} \\ &= E_0 e^{-m_i k_0 z} e^{i(\omega t - m_r k_0 z + \phi)} \end{aligned}$$

Amplitude à  $z$ :

$$E_0(z) = E_0(z=0) e^{-m_i k_0 z}$$

Profondeur de pénétration  $d$ :

$$\frac{E_0(z=d)}{E_0(z=0)} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{m_i k_0} = 0.16 \frac{\lambda}{m_i}$$

$$\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$$

$$m_i = 0.1, d = 1 \mu\text{m}$$

$$m_i = 0.0001, d = 1 \text{ mm}$$

# Généralité – conservation d'énergie

## Densité d'énergie et intensité lumineuse

Densité d'énergie ( $\text{J/m}^3$ ):  $u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$

Vecteur de Poynting ( $\text{W/m}^2$ ):

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

Représentation complexe



Dans un milieu isotrope:  $\vec{S} = v u \vec{n}$

Intensité:  $I = \|\vec{S}\| \propto E^2$

# Généralité – Polarisation

Relation entre l'onde incident et l'onde diffusée  
au champ lointain

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}$$

$S_3 = S_4 = 0$  pour une sphère homogène ou concentrique

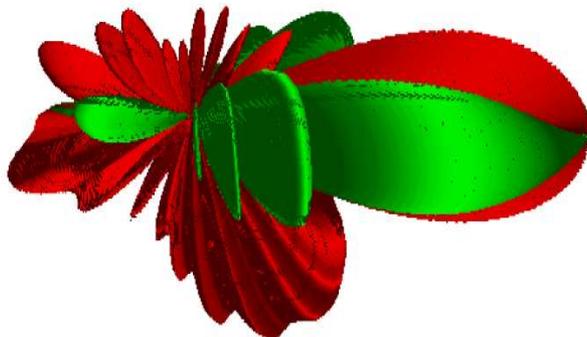
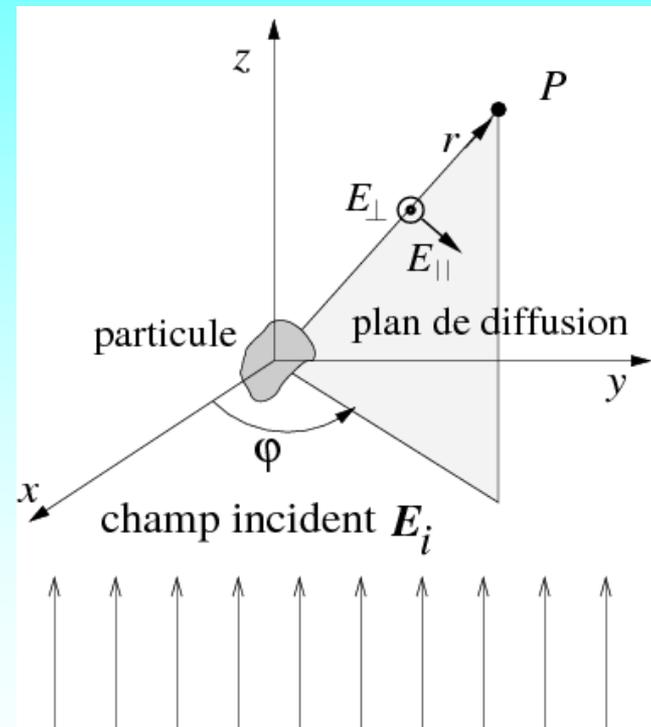


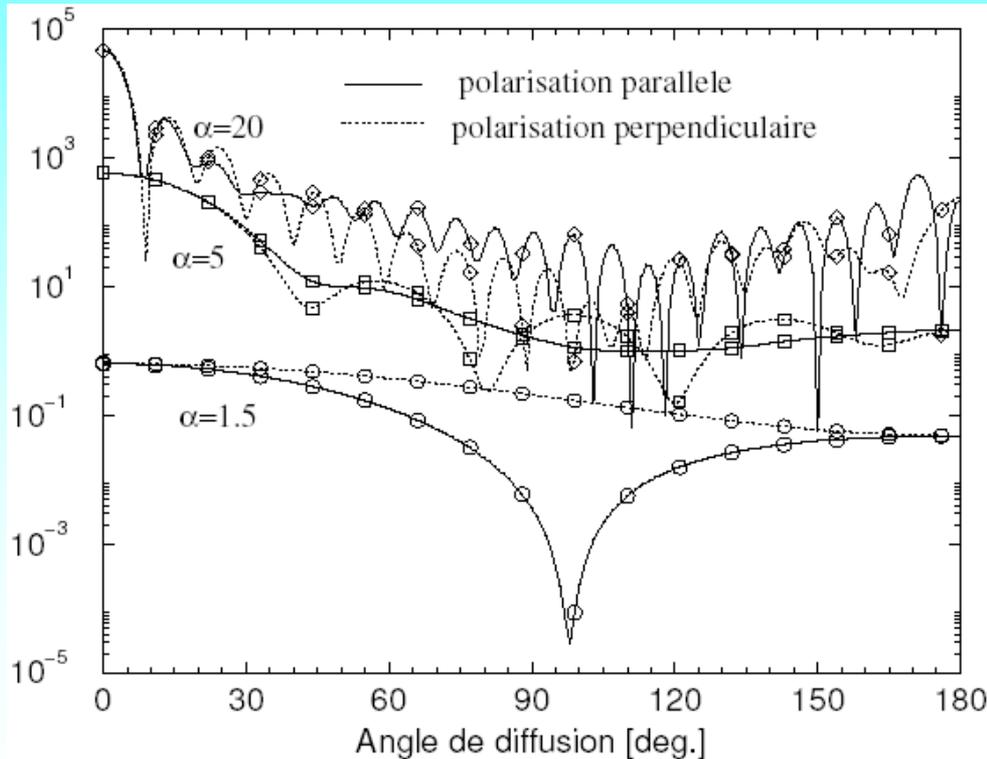
Diagramme de diffusion d'une sphère éclairée par un faisceau gaussien (hors axe), polarisation perpendiculaire en rouge et parallèle en vert.



# Généralité – Diagrammes de diffusion

## Répartition angulaire d'intensité de l'onde diffusée au champ lointain

Une sphère de **diamètre**  $d=2a$  et **d'indice de réfraction**  $m=1.33$  éclairée par une onde plane



$$I(\theta, \varphi) = \frac{I_0 F(\theta, \varphi)}{k^2 r^2}$$

$$I_{\parallel} = F(\theta, \phi = 0) = |S_2|^2$$

$$I_{\perp} = F(\theta, \phi = 90^\circ) = |S_1|^2$$

**Paramètre de taille :**

$$\alpha = \frac{\pi d}{\lambda}$$

# Généralité – Extinction, diffusion, absorption

## Propriétés intégrales d'une particule diffusante

A l'extérieur de la particule:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$

**Le vecteur de Poynting:**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} = \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_{ext}$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*\}$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\}$$

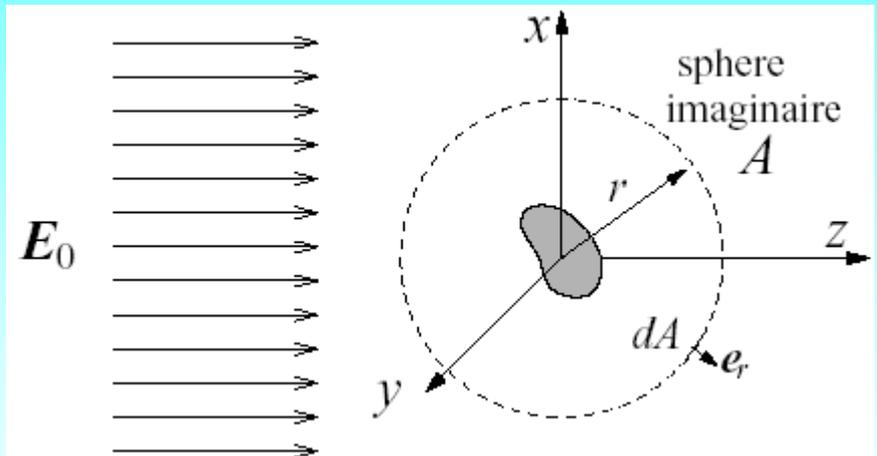
$$\mathbf{S}_{ext} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_s^* + \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_i^*\}$$

**Bilan d'énergie**

$$W_a = - \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r dA = W_i - W_s + W_{ext}$$

$$W_i = - \int_A \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_r dA, \quad W_s = \int_A \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{e}_r dA, \quad W_{ext} = - \int_A \mathbf{S}_{ext} \cdot \mathbf{e}_r dA$$

$$W_{ext} = W_{abs} + W_{sca}$$



# Généralité – Extinction, diffusion, absorption

## Définition des sections et des facteurs

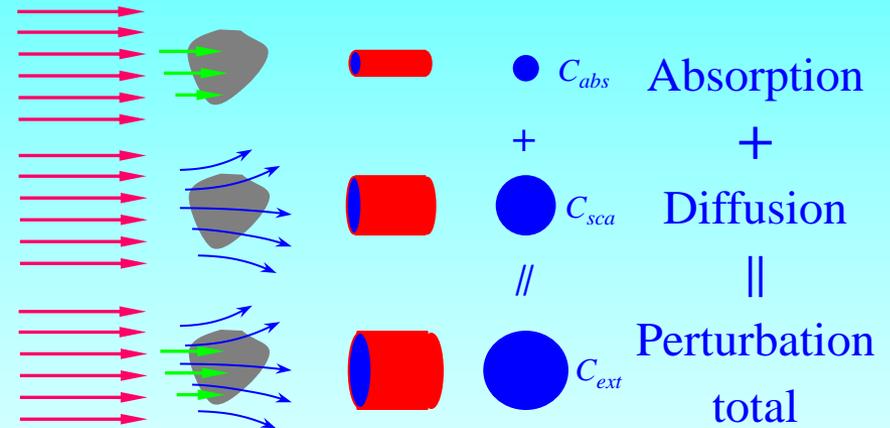
Sections d'efficacité:

$$\text{Section d'absorption : } C_{abs} = \frac{W_{abs}}{I_i}$$

$$\text{Section de diffusion : } C_{sca} = \frac{W_{sca}}{I_i}$$

$$\text{Section d'extinction : } C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i}$$

Interprétation physique



Facteurs d'efficacité

$$Q_{ext} = \frac{C_{ext}}{A}, \quad Q_{abs} = \frac{C_{abs}}{A}, \quad Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{A}$$

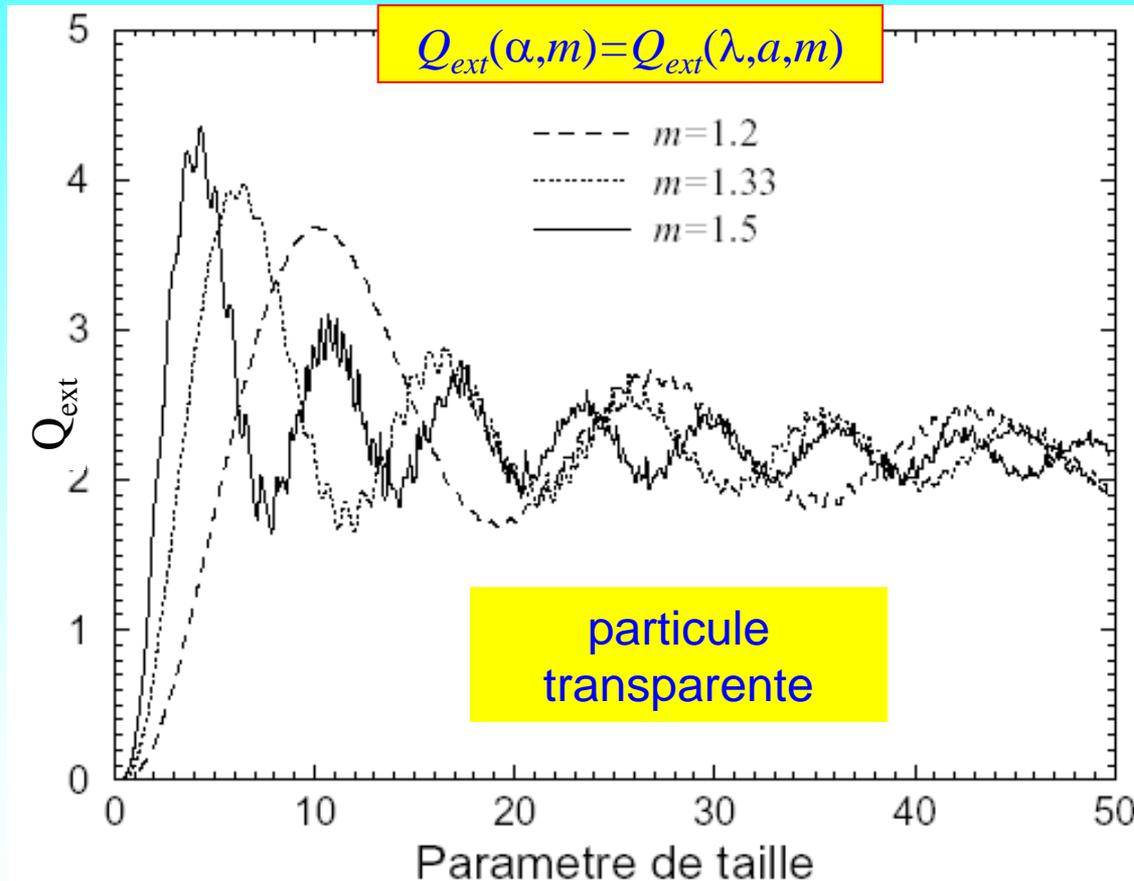
Non absorption:

$$C_{abs} = 0, \quad C_{ext} = C_{sca}$$

$$Q_{abs} = 0, \quad Q_{ext} = Q_{sca}$$

# Généralité – Extinction, diffusion, absorption

Savoir lire et interpréter le graphique



Petite particule

$$Q_{ext} \sim \frac{d^4}{\lambda^4}$$

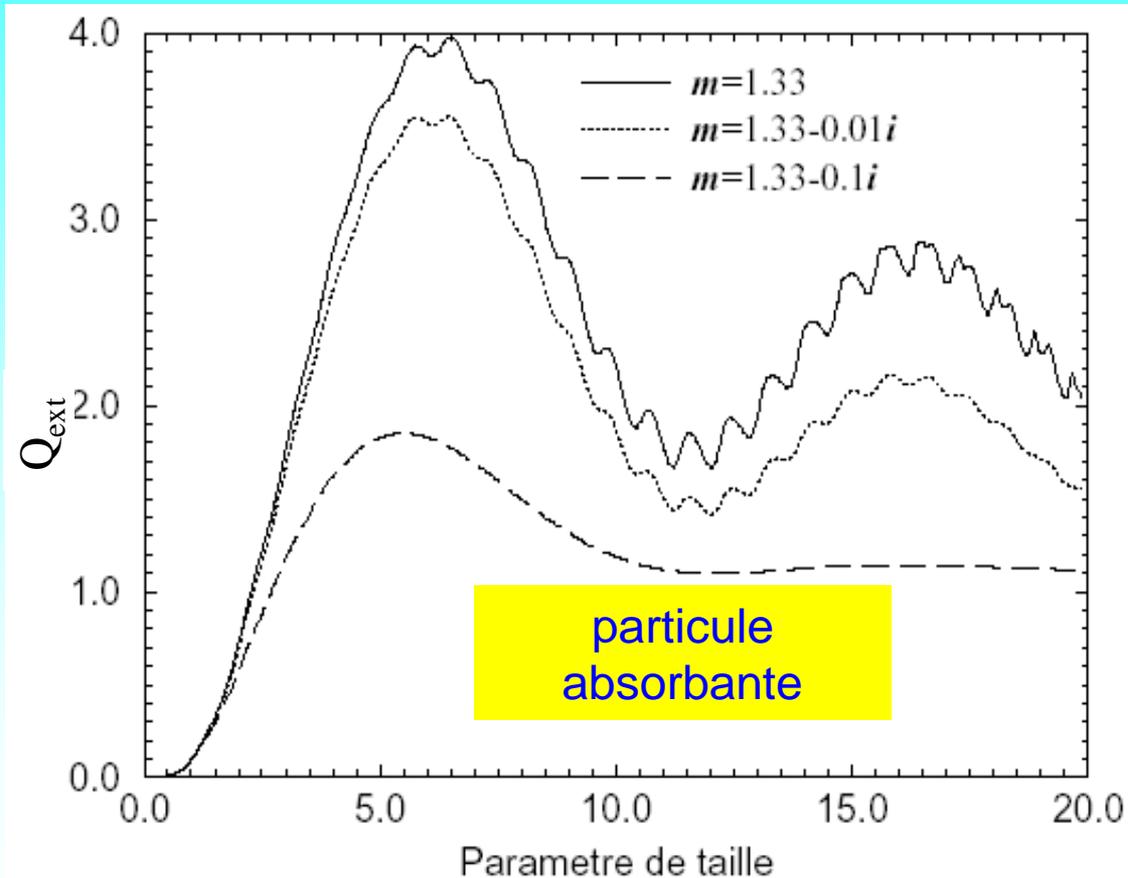
Grosse particule

$$Q_{ext} \rightarrow 2$$

Pourquoi le ciel est bleu  
et le soleil est rouge au  
levé et au couché?

# Généralité – Extinction, diffusion, absorption

## Savoir lire et interpréter la graphique



- Plus l'absorption est importante plus la courbe est lisse.
- Plus l'absorption est importante plus le facteur d'extinction est petit.
- Pour les petites particules:

$$Q_{\text{ext}} \propto \alpha$$

- Pour les grosses particules:

$$Q_{\text{ext}} \rightarrow 1$$

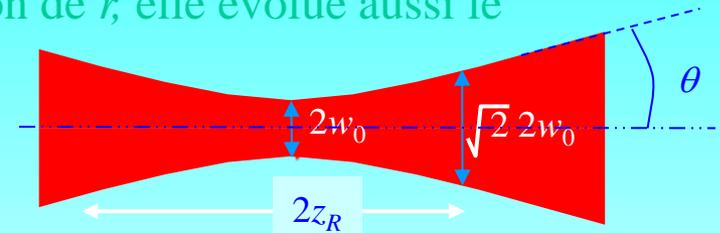
C-à-d:  $C_{\text{ext}} \rightarrow A$

# Généralité – Faisceau gaussien

## Répartition de l'intensité et forme géométrique

(a). **Intensité** décroît exponentiellement en fonction de  $r$ ; elle évolue aussi le long du faisceau en  $z$

$$I(r, z) = I_0 \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{2r^2}{w^2(z)} \right]$$



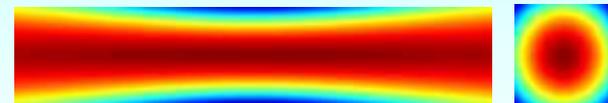
(b). **Rayon au col du faisceau** (beam waist radius)

$$I(r = w(z)) = \frac{I(r = 0, z)}{e^2}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2}$$

(c). **Divergence du faisceau:**

$$\theta = \arctan \left( \frac{\lambda}{\pi w_0} \right)$$



(d). **Distance de Rayleigh:**  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ .

$$I(0, z_R) = \frac{I_0}{2}, \quad w(z_R) = \sqrt{2} w_0$$

# Généralité – Faisceau gaussien

## Quelques exemples de calcul

Divergence:

1.  $\lambda = 600 \text{ nm}$  :

$$w_0 = 10 \text{ } \mu\text{m}, z_R = 500 \text{ } \mu\text{m}, \theta = 0.02 \text{ rad}$$

$$w_0 = 1 \text{ mm}, z_R = 5 \text{ m}, \theta = 0.0002 \text{ rad}$$

$$w_0 = 1 \text{ cm}, z_R = 500 \text{ m}, \theta = 0.00002 \text{ rad}$$

2.  $w_0 = 100 \text{ } \mu\text{m}$  :

$$\lambda = 10.6 \text{ } \mu\text{m} \text{ (CO}_2\text{)}, z_R = 3 \text{ mm}, \theta = 0.034 \text{ rad}$$

$$\lambda = 0.6328 \text{ } \mu\text{m} \text{ (He-Ne)}, z_R = 5 \text{ cm}, \theta = 0.002 \text{ rad}$$

$$\lambda = 0.488 \text{ } \mu\text{m} \text{ (bleu YAG)}, z_R = 6.4 \text{ cm}, \theta = 1.5 \text{ mrad}$$

Intensité:

Au centre:

$$I = I_0$$

Au bord du faisceau:

$$I(r = w_0) = \frac{I(r = 0, z = 0)}{e^2} = \frac{I_0}{e^2}$$

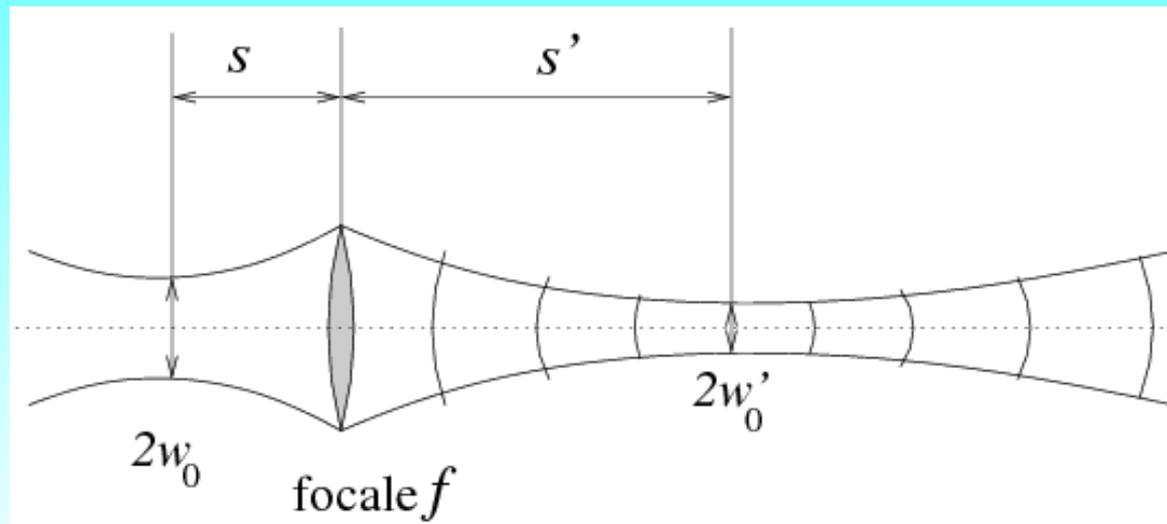
Puissance totale:

$$\begin{aligned} P &= \int I(r, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(r, z) r dr d\theta \\ &= 2\pi I_0 \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \int_0^\infty \exp\left[ -\frac{2r^2}{w^2(z)} \right] r dr \\ &= I_0 \frac{\pi w_0^2}{2} \end{aligned}$$

# Généralité – Faisceau gaussien

## Relation de conjugaison

Position des cols avant et après d'une lentille



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s + \frac{z_R^2}{s + f'}} = \frac{1}{f'}$$

ou

$$s' = f' \left[ 1 - \frac{f'(s + f')}{(s + f')^2 + z_R^2} \right]$$

# Généralité – Faisceau gaussien

## Relation de conjugaison

Position des cols avant et après d'une lentille

### Conséquences :

- pour des faisceaux quasi-parallèles,  $z_R \gg$  autres distances, donc  $s' = f'$  comportement proche de l'optique géométrique.
- si on place le col d'un faisceau laser au foyer objet d'une lentille, on trouve un col au foyer image de cette lentille. En effet,  $s = -f \Rightarrow s' = f'$  : résultat radicalement différent de l'optique géométrique.
- relation de conjugaison entre  $s$  et  $s'$  dépend non seulement de  $f'$  mais aussi de  $z_R$  donc de  $\lambda$  et  $w_0$ , différente de l'optique géométrique.

# Généralité – Faisceau gaussien

## Relation de conjugaison

Position des cols avant et après d'une lentille

### - Changement de taille du col :

$$m = \frac{w_0'}{w_0} = \left[ \left( 1 + \frac{s}{f'} \right)^2 + \left( \frac{z_R}{f'} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$z_R' = m^2 z_R$$

1. Dans le cas où  $s$  tend vers l'infini, alors  $m = 0 \rightarrow w' = 0$  ( mais non, minimum donc  $\sim \lambda/2$ )
2. Dans le cas où  $s = -f'$  (col objet au foyer objet), alors  $m = f'/z_R = f\lambda / \pi w_0^2$

Même formule, mais situation très différente !

$$\theta' = \lambda / \pi w_0' = w_0 / f'.$$

Exemple:  $w_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $f' = 0.1 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0.6328 \text{ }\mu\text{m} \rightarrow z_R = 500 \text{ m}$ ,  $\theta = 0.001^\circ$

$s = -f' = -0.1 \text{ m} \rightarrow s' = 0.1 \text{ m}$ ,  $w_0' = 2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\theta' = 5.7^\circ$

on passe d'un grand col à un petit col ...

En pratique  $w_0$  peut être très petit, et donc  $w_0'$  grand, avec tous les intermédiaires...

