Formulaire de la Mécanique des Systèmes

K. F. Ren

1. Calcul du centre d'inertie et du moment d'inertie

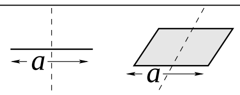
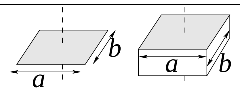
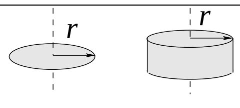
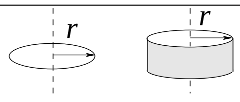
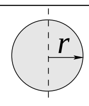
- **Procédure à suivre:**

		centre d'inertie	moment d'inertie	Remarques
1	définition	$mx_G = \int xdm$ ou $mx_G = \sum x_i m_i$	$I_{Ox} = \int (y^2+z^2)dm$ ou $I_{Ox} = \sum (y_i^2+z_i^2)m_i$	idem pour les composantes y et z
2	dm	volume: $dm = \rho dV$; surface: $dm = \sigma dS$; ligne: $dm = \lambda dl$ coorddonnées sphériques: $dV = r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$ coorddonnées cylindrique: $dV = r dr d\phi dz$		
3	définir les bornes d'intégration et effectuer l'intégration			
4	remplacer : $\rho = m/V$, $\sigma = m/S$, $\lambda = m/l$			

- **Centre d'inertie**: $m\overrightarrow{OG} = \iiint \overrightarrow{OM} dm$ ou $m\overrightarrow{OG} = \Sigma m_i \overrightarrow{OM}_i$.
  Le centre d'inertie d'un object homogène de forme simple se trouve au centre géométrique.

- **Théorèmes de Huygens:** $I_{Ox} = I_{Gx'} + mD^2$
  où G est le centre d'inertie et D la distance entre les deux axes parallels Ox et Gx'.

- **Moment d'inertie de quelques solides de forme simple**

Corps homogènes de masse m	axes	Moment d'inertie
tige ou plaque		$I = \frac{1}{12}ma^2$
parallélépipède rectangle, plaque		$I = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
disk, cylindre plein		$I = \frac{1}{2}mr^2$
cercle, cylindre creux		$I = mr^2$
sphère pleine		$I = \frac{2}{5}mr^2$

2. Cinématique

Relations fondamentales:

- **Produit scalaire:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = uv\cos\theta$
- **Produit vectoriel:** $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{matrix}$, $\quad |\vec{u}\wedge\vec{v}| = vu\sin\theta$
- **Relation fondamentale de la cinématique:** $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}$
- **Vitesse de glissement:** $\vec{u}(I\in S_2/S_1) = \vec{v}(I\in S_2/R) - \vec{v}(I\in S_1/R)$.
  - I est le point de contact entre les solids S_1 et S_2 ;
  - Le sens de la force de frottement $\vec{T}$ (tangente à la surface) est toujours opposé au sens de la vitesse de glissement: $\vec{T}\cdot\vec{u} < 0$.

Changement de référentiels:

- **Dérivée d'un vecteur:** $\left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\vec{U}$
- **Composition de vitesse de rotation:** $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$
- **Composition des vitesses:** $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{O'A}}_{\text{entrainement}}$
- **Composition des accélérations:**

$$\vec{\gamma}_{A/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{\gamma}_{A/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}} + \underbrace{\vec{\gamma}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{O'A})}_{\text{entrainement}} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}}_{\text{Coriolis}}$$

  où les trois termes dans l'accélération d'entraînement peuvent entre compris comme suit:
  - Accélération de translation de l'origine du référentiel $\mathcal{R}$: $\vec{\gamma}_{O'/\mathcal{R}}$
  - Accélération tangentielle de rotation: $\dfrac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'A}$
  - Accélération centrépète : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\wedge\overrightarrow{O'A})$
- **Relation des bases de deux référentiels** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **et** $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k})$**:**

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \qquad \tfrac{d\vec{u}_r}{dt} = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \qquad \tfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

3. Dynamique

- **Analogie translation-rotation dans le cas d'un solide:**

	Translation	Rotation
Vitesse	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
Accélération	$\vec{\gamma}$	$\dot{\vec{\omega}}$
Cause du mouvement	$\vec{F}$	$\vec{M}_\Delta$
Grandeur d'inertie	m	I_Δ
Equation du mouvement	$m\vec{\gamma} = \vec{F}$	$I_\Delta \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_\Delta$

- Quantité du mouvement: $\vec{p} = m\vec{v}_G$
- Moment cinétique: $\vec{\sigma}_O = I_G\vec{\omega} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}_G$ (axe fixe: $\vec{\sigma}_\Delta = I_\Delta\vec{\omega}$)
- Energie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ (axe fixe: $E_c = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$)
- Théorèmes généraux de la dynamique:
  1. Théorème du moment cinétique (rotation): $\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \Sigma\vec{M}_O$ $(I\dot{\vec{\omega}} = \Sigma\vec{M})$
     pour un point mobile O': $\left(\dfrac{d\vec{\sigma}_{O'/R}}{dt}\right)_R + \vec{v}_{O'/R} \wedge \vec{p}_{A/R} = \Sigma\vec{M}'_O$
  2. Théorème de la quantité de mouvement (translation du centre d'inertie):
     $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}$ $(m\vec{\gamma}_G = \Sigma\vec{F})$
- Théorème de l'énergie cinétique: $E_{c,2} - E_{c,1} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$
  ou $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$

4. Matrice d'inertie

$$\mathfrak{I}(O,S) = \begin{pmatrix} I_{Ox} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Oy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Oz} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} I_{Ox} = \int (y^2+z^2)dm \\ I_{xy} = \int (xy)dm \end{array} \tag{1}$$

Critères pour déterminer les axes principaux:

- Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.
- Tout axe de symétrie matérielle et tout axe perpendiculaire à celui-ci sont axes principaux d'inertie.

5. Torseurs

Torseur cinétique:

$$[\mathcal{P}_O] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{p} \\ \vec{\sigma}_O \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \text{la quantité du mouvement: } \overrightarrow{p} = \sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G \\ \text{le moment cinétique: } \vec{\sigma}_O = \sum \overrightarrow{OA}_i \wedge m_i\vec{v}_i = [I]_O\overrightarrow{\Omega} \end{array}$$

Théorème de Kœnig: $\vec{\sigma}_{O'} = \vec{\sigma}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}$, $\quad \vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}$
O et O' sont deux points quelconques, G le centre d'inertie.

Torseur dynamique:

$$[\delta_O] = \begin{bmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_O \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{c} \text{la somme dynamique: } \vec{D} = \sum m_i \vec{\gamma}_i = m\vec{\gamma}_G \\ \text{le moment dynamique: } \vec{\delta}_O = \sum(\overrightarrow{OA}_i \wedge m_i \vec{\gamma}_i) \end{array}$$

Théorème de Kœnig: $\vec{\delta}_{O'} = \vec{\delta}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{D}$, $\quad \vec{\delta}_O = \vec{\delta}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{D}$
O et O' sont deux points quelconques, G le centre d'inertie.

Relation entre le torseur cinétique et dynamique:

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} + \vec{v}_O \wedge \vec{p}$$

Si O est fixe dans R ou si O est le centre d'inertie:

$$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{\delta}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$$

Torseur des forces:

$$[\mathcal{F}_O] = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_O \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{c} \vec{F} \text{est la force résultante.} \\ \vec{M}_O \text{ est le moment des forces} \end{array}$$

6. Principe fondamental de la dynamique:

$$\frac{d[\mathcal{P}_O]}{dt} = [\mathcal{F}_{O,ex}] = [\delta_O]$$

ou

$$\vec{D} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad \vec{\delta}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} + \vec{v}_O \wedge \vec{P} = \vec{M}_O$$