Contrôle continu du 29 mars 2017

Mécanique générale

Durée : 2 heures

Les cours et les TD ne sont pas autorisés, les calculatrices sont interdites.

On note $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0\vec{y}_0\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié à un bâti (B). L'axe $O\vec{z}_0$ est vertical ascendant. On veut étudier dans $\mathcal{R}_0$ le mouvement d'un système (Σ) constitué d'une tige (T), un cercle (C) et un point matériel (M) (voir la figure):

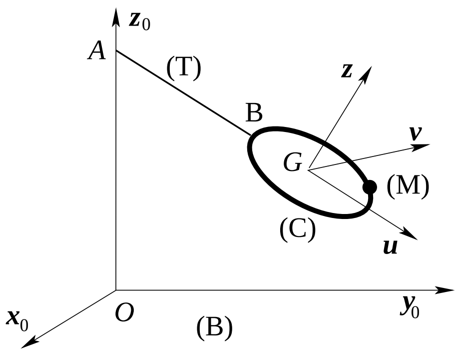
- (T) est une tige rectiligne homogène AB de longueur l, de section et de masse négligeables. On pose $\overrightarrow{AB} = l\vec{u}$. Elle est articulée au bâti (B) par une liaison rotoïde parfaite d'axe $O\vec{z}_0$ de façon que $\vec{z}_0 \cdot \vec{u} = 0$.
- (C) est un cercle homogène de centre G, de masse m et de rayon r. On définit un repère orthonormé direct lié au cercle $\mathcal{R} = (G; \vec{u}\vec{v}\vec{z})$ de façon que $\vec{v}$ est dans le plan du cercle. (C) est articulé sur (T) par une liaison rotoïde parfaite d'axe $\overrightarrow{BG} = r\vec{u}$
- Le point matériel (M) glisse sans frottement sur le cercle et sa position est mesurée par un angle ϕ par rapport à l'axe $\vec{u}$.

Afin de repérer la position du système, on utilise les angles d'Euler classiques ψ, θ, ϕ:

$\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{u}})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$.

$\theta = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}})$ mesuré autour de $\vec{u}$.

$\phi = (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{GM}})$ mesuré autour de $\vec{z}$.



1. Rappeler la définition des angles d'Euler et donner le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. Calculer la dérivée par rapport au temps des vecteurs unitaires de la base du repère $\mathcal{R}$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
3. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OG}$ et calculer la vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ de G par rapport à $\mathcal{R}_0$.

4. Calculer la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_0)$ du point matériel (M) par la dérivée du vecteur position ou par la composition des mouvements.

5. Montrer que les projections de $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{v}(M/\mathcal{R}_0)$ dans la direction $\overrightarrow{GM}$ sont égaux.

Dans la suite de l'exercice on enlève le point matériel (M).

6. Donner dans le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ le tenseur d'inertie en G du cercle.

7. Déterminer le moment cinétique en G du cercle dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

8. En déduire le moment cinétique de Σ en A par rapport $\mathcal{R}_0$.

9. Déterminer l'énergie cinétique de (C) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

10. Faire un bilan des efforts exercés sur Σ et sur la tige.

11. En appliquant le théorème du moment cinétique à la tige, montrer que la composante $\vec{u}$ du moment en A des actions de liaison sur la tige est nul.

12. Déduire des questions précédantes deux équations différentielles satisfaites par $\psi(t)$ et $\theta(t)$, ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons.

Correction:

1. Définition des angles d'Euler (voir cours ou formulaire).
   Le vecteur rotation:
   $$\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{v} + \dot{\psi}\cos\theta\vec{z}$$
   pas de $\dot{\phi}$ car c'est $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$, non pas $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})/\mathcal{R}_0$.

2. La dérivée des vecteurs unitaires de la base du repère $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$:
   $\dot{\vec{u}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{u} = \dot{\psi}\vec{v}_1 = \dot{\psi}\cos\theta\vec{v} - \dot{\psi}\sin\theta\vec{z}$
   $\dot{\vec{v}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v} = -\dot{\psi}\cos\theta\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z}$
   $\dot{\vec{z}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{u} - \dot{\theta}\vec{v}$
   Il est plus simple de calculer les produits vectoriels par sa définition géométrique: module: $||\vec{a} \wedge \vec{b}|| = ab\sin(\widehat{\vec{a} \wedge \vec{b}})$, direction : règle de la main droite.

3. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + (l+r)\vec{u}$. $\overrightarrow{OA}$ étant constant, la vitesse de G:
   $$\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = (l+r)\dot{\vec{u}} = (l+r)\dot{\psi}\vec{v}_1 = (l+r)\dot{\psi}(\cos\theta\vec{v} - \sin\theta\vec{z})$$
   Le point G fait un mouvement circulaire autour de l$\vec{z}_0$ de rayon $l+r$).

4. Deux méthodes pour calculer la vitesse:
   - dérivée directe: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$. $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \neq \vec{\Omega}((\vec{x}\vec{y}\vec{z})/\mathcal{R}_0)$
   $$\begin{aligned}\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + r\left[\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{x} + \left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\right] \\ &= \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + r\left[\dot{\theta}\sin\phi\vec{z} + \dot{\psi}(-\sin\theta\cos\phi\vec{z} + \cos\theta\vec{y}) + \dot{\phi}\vec{y}\right]\end{aligned}$$
   - composition des mouvements:
     vitesse d'entraînement: $\vec{v}_{ent} = \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + r\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{x}$
     vitesse relative: $\vec{v}_{rel} = \left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$
     Donc on trouve le même résultat.

5. Il suffit de montrer que $[\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) - \vec{v}(G/\mathcal{R}_0)] \cdot \vec{x} = 0$. En fait, dans la question précédente on a montré
   $$\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + r\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{x} + \dot{\phi}\vec{y}$$
   Il est évident que les deux derniers termes sont perpendiculaires à $\vec{x}$. Donc
   $$\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x} = \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x} = 0$$

6. Le tenseur d'inertie du cercle en G :
   $$\mathcal{T}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}_{G\vec{u}\vec{v}\vec{z}}$$
   Toute la masse a une distance r par rapport à l'axe $G\vec{z}$, donc $I_{Gz} = mr^2$, Puis selon le théorème de Huygens $I_{Gz} = I_{Gx} + I_{Gy}$, ainsi on trouve $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{1}{2}mr^2$.
   Aucun moment d'inertie n'est nul car la masse n'est pas sur un axe!

7. Le moment cinétique en G:

$$\vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_G = \mathcal{T}_G \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}\vec{z}} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\vec{u}\vec{v}\vec{z}}$$

d'où

$$\vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_G = \frac{1}{2}mr^2[\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}(\sin\theta\vec{v} + 2\cos\theta\vec{z})]$$

Ici, $\mathcal{T}_G \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)\mathcal{T}_G$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ doivent être exprimés dans la même base, sinon le produit n'a pas de sens.

8. Le moment cinétique en A:
On sait $\vec{v}_G = (l+r)\dot{\psi}\vec{v}_1$ et $\overrightarrow{AG} = (l+r)\vec{u}$.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_A &= \vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_G + \vec{\sigma}(A, G(m)) = \vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_G + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A \\ &= \frac{1}{2}mr^2[\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}(\sin\theta\vec{v} + 2\cos\theta\vec{z})] + m(l+r)^2\dot{\psi}\vec{z}_0 \end{aligned}$$

Il est aussi possible de calculer $\vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_A$ par le tenseur d'inertie en A:

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 + m(l+r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 + m(l+r)^2 \end{pmatrix}_{A\vec{u}\vec{v}\vec{z}}$$

La formule $\vec{\sigma}(C/\mathcal{R}_0)_A = \mathcal{T}_A \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ donne le même résultat.

9. L'énergie cinétique :

$$2T = \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \cdot \mathcal{T}_G \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) + mv^2(G/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2(1 + 3\cos^2\theta)] + m(l+r)^2\dot{\psi}^2$$

10. Bilan des efforts appliqués à Σ:

   - La pesanteur du cercle en G:

$$\mathcal{T}_{P\to C} = \begin{pmatrix} -mg\vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

   - La liaison rotoïde d'axe $\vec{z}_0$ sur la tige:

$$\mathcal{T}_{\vec{z}_0\to T} = \begin{bmatrix} \vec{R}_T \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_T \end{bmatrix}_A$$

   avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}_T \cdot \vec{z}_0 = 0$

   Bilan des efforts appliqués à la tige:

   - La liaison rotoïde d'axe $\vec{z}_0$ sur la tige: idem

- La liaison rotoïde d'axe $G\vec{u}$ du cercle sur la tige:

$$\mathcal{T}_{C\to T} = \begin{bmatrix} \vec{R}_C \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_C \end{bmatrix}_B$$

avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}_C \cdot \vec{u} = 0$

11. Le moment résultant en B des efforts extérieurs exercés sur Σ en B:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_T + \vec{R}_T \wedge l\vec{u} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_C$$

La masse de la tige étant négligeable, son moment dynamique est nul. L'application du théorème cinétique (théorèmes généraux) à la tige implique donc $\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = 0$. Sachant que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_C \cdot \vec{u} = 0$ et $(\vec{R}_T \wedge l\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$ on en déduit que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_T \cdot \vec{u} = 0$.

⚠ Le moment dynamique et les moments des tous les efforts extérieurs foivent faire référence au **même point**. Ici en B et la question 12 en A.

12. Application du théorème du moment cinétique à Σ en A:

$$\delta(\Sigma/\mathcal{R}_0)_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A$$

alors A est un point fixe, donc

$$\vec{\delta}(\Sigma/\mathcal{R}_0)_A = \left.\frac{\sigma(C/\mathcal{R}_0)_A}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

Pour simplifier le calcul, on réécrit $\vec{\sigma}_A$:

$$\vec{\sigma}_A = \frac{1}{2}mr^2[\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z} + \vec{z}_0)] + m(l+r)^2\dot{\psi}\vec{z}_0$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_A &= \frac{1}{2}mr^2[\ddot{\theta}\vec{u} + \ddot{\psi}(\cos\theta\vec{z} + \vec{z}_0) + \dot{\theta}\dot{\vec{u}} + \dot{\psi}(-\dot{\theta}\sin\theta\vec{z} + \cos\theta\dot{\vec{z}}] + m(l+r)^2\ddot{\psi}\vec{z}_0 \\ &= \frac{1}{2}mr^2[(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{u} - \dot{\theta}\dot{\psi}(1+\cos\theta)\vec{v} + \ddot{\psi}\vec{z}_0 + (\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z}] \\ &+ m(l+r)^2\ddot{\psi}\vec{z}_0 \end{aligned}$$

On peut aussi calculer $\vec{\delta}$ avec la formule suivante en écrivant $\vec{z}_0 = \sin\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{z}$ dans l'expression de $\vec{\sigma}_A$ trouvé dans la question 8:

$$\vec{\delta}(\Sigma/\mathcal{R}_0)_A = \left.\frac{\sigma(C/\mathcal{R}_0)_A}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\sigma(C/\mathcal{R}_0)_A}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \sigma_A$$

Selon les résultats des questions précédentes, on a

$$\vec{\delta}_A \cdot \vec{u} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{u} = 0$$

Sachant que $\vec{z}_0 \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, on en déduit de $\vec{\delta}_A \cdot \vec{u} = 0$:

$$\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

Aussi on sait

$$\vec{\delta}_A \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{z}_0 = 0$$

et $\vec{z} \cdot \vec{z}_0 = \cos\theta$, $\vec{v} \cdot \vec{z}_0 = \sin\theta$, $\vec{u} \cdot \vec{z}_0 = 0$, on déduit de $\vec{\delta}_A \cdot \vec{z}_0$:

$$2(l+r)^2\ddot{\psi} + r^2[(1+\cos^2\theta)\ddot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta(1+2\cos\theta)] = 0$$