Travaux dirigés

Mécanique générale

L2 PMSI, parcours mécanique, 2017

K. F. Ren

1 Propriétés des torseurs

1.1 Compatibilité des données

L'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté au repère orthonormé direct (O.N.D) $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soient $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$. On note $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P, \mathcal{T})$ le moment en P du torseur $\mathcal{T}$. On pose : $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O, \mathcal{T}) = 2\vec{y} + \vec{z}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \mathcal{T}) = \vec{y} + 2\vec{z}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}}(B, \mathcal{T}) = \vec{x} + 2\vec{y}$.

1. Vérifier la compatibilité des données,
2. Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}(C, \mathcal{T})$,
3. Calculer la résultante $\vec{R}$ du torseur $\mathcal{T}$.

1.2 Eléments de réduction d'un torseur

Dans cet exercice a, b et c sont des scalaires constants donnés. On considère 4 points A, B, C, D de l'espace affine $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = a\vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = a\vec{k}$. $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère O.N.D. de $\mathscr{E}$. On se donne un torseur $\mathcal{T}$ dont le moment en A est $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A, \mathcal{T}) = b\vec{i}$.

1. Déterminer α, β, γ pour que les vecteurs $\alpha\vec{i} + c\vec{j}$ et $\beta\vec{i} + \gamma\vec{k}$ représentent respectivement le moment en B et D du torseur $\mathcal{T}$.
2. Déterminer les éléments de réduction du torseur en A, B et D.

1.3 Torseur cinématique

Soit $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe et $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$. Le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ est défini par une rotation d'axe $O_0\vec{x}_0$ d'angle $\theta = \omega t = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}})$, suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{O_0O} = at\vec{y}_0$ (ω et a sont des constantes et t désigne le temps).

1. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. On se donne un vecteur position $\vec{r}$ par ses composantes dans le repère mobile $\mathcal{R}$: $\vec{r} = (0, a\cos\omega t, \ -a\sin\omega t)$. Calculer la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{r}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ (on donnera les composantes dans $\mathcal{R}$).

3. Soit B un point de coordonnées dans $\mathcal{R}$: $(0, b, 0)$ où b est une constante. Déterminer les éléments de réduction en B du torseur cinématique et calculer la dérivée du moment par rapport au repère mobile $\mathcal{R}$ puis par rapport au repère fixe $\mathcal{R}_0$.

2 Composition des mouvements

2.1 Mouvement d'un cube

Soit $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe et $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$. OA, OB et OC sont trois arêtes d'un cube $\mathcal{C}$ de coté L. $\overrightarrow{OA} = L\vec{x}$, $\overrightarrow{OB} = L\vec{y}$ et $\overrightarrow{OC} = L\vec{z}$. Ce cube est en mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ de telle sorte qu'à chaque instant les projections de
- $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$ sur $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont respectivement $2\omega L$ et $-\omega L$,
- $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0)$ sur $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont respectivement 0 et ωL,
- $\vec{V}(C/\mathcal{R}_0)$ sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont respectivement ωL et ωL

avec $\omega = \omega(t)$.

1. Déterminer complètement les vitesses absolues de A, B, C,
2. Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}_0)$,
3. Calculer l'accélération absolue des points A, B, C,
4. Calculer la vitesse et l'accélération absolues d'un point P ($\overrightarrow{OP} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$) dans les cas suivants :
   - P est lié au cube,
   - P est mobile par rapport au cube.

2.2 Mouvement d'un cercle

Soit un repère $\mathcal{R}_0$ de référence défini par $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On définit un repère $\mathcal{R}_1 = (O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$ de la façon suivante : O_1 origine du repère décrit dans le plan Ox_0y_0 un cercle de rayon a, le rayon $\overrightarrow{OO_1}$ faisant un angle $\theta(t)$ avec l'axe Ox_0. D'autre part l'axe O_1y_1 reste parallèle à Oy_0. On appelle $\phi(t) = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}_1})$ mesuré autour de O_1y_1.

1. Déterminer le vecteur $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$,
2. Dans le repère $\mathcal{R}_1$ on considère un point M sur l'axe O_1z_1. On pose $\overrightarrow{O_1M} = z(t)\vec{z}_1$.
   - Calculer la vitesse relative de M par rapport à $\mathcal{R}_1$.
   - Calculer la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}_0$ par la composition des mouvements. On donnera le résultat dans la base de $\mathcal{R}_1$.
3. Calculer l'accélération de M par rapport à $\mathcal{R}_0$
   - en calculant directement la dérivée en projection dans $\mathcal{R}_1$
   - par la composition des accélérations.

3 Angles d'Euler

3.1 Mouvement d'une bille

On considère un plan horizontal fixe (P_0) et une bille (B) de centre O et de rayon r qui reste en contact ponctuel avec le plan (P_0). On désignera par $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié au plan (P_0) tel que O_0 appartienne à (P_0) et que $O_0\vec{z}_0$ soit vertical ascendant. $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera un repère orthonormé direct lié à la bille (B).

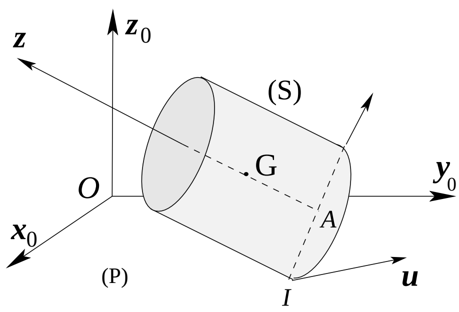
La position de la bille par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est définie par 5 paramètres : x, y les coordonnées de O sur les axes $O_0\vec{x}_0$ et $O_0\vec{y}_0$, et ψ, θ, ϕ les angles d'Euler habituels.

1. Rappeler avec précision la définition des angles d'Euler. Donner l'expression du vecteur $\vec{\Omega}(B/\mathcal{R}_0)$ représentant la vitesse de rotation instantanée du mouvement de la bille par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. Calculer ses trois composantes, sur les axes du repère $\mathcal{R}_0$, en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées premières.
3. La bille roule et pivote sans glisser sur le plan (P_0). Ecrire en fonction des paramètres et de leurs dérivées les relations qui traduisent le roulement et pivotement sans glissement.
4. Ecrire la condition qui traduirait le non pivotement en fonction des paramètres et de leurs dérivées.
5. Les conditions du 3 et du 4 sont supposées remplies, on suppose de plus que l'angle de rotation θ reste constant au cours du mouvement. Trouver alors la trajectoire du centre O de la bille.

3.2 Mouvement d'un cylindre

Soit S un cylindre de révolution, on note $2L$ sa hauteur, R le rayon de sa base, G son centre. S est au contact d'un plan P auquel est lié le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, O étant dans le plan P et $\vec{z}_0$ orthogonal à P du coté de S.

Le contact entre S et P est ponctuel, il s'effectue en un point I de l'une des bases du cylindre ; on note A le centre de cette base et $\mathcal{R}_S = (G; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à S tel que $\overrightarrow{AG} = L\vec{z}$. La position de S dans $\mathcal{R}_0$ est repérée par les angles d'Euler classiques ψ, θ, ϕ et par les coordonnées x, y, z de G dans $\mathcal{R}_0$. On suppose la ligne des noeuds (ligne dans le plan P et tangente à la base du cylindre) orientée par $\vec{u}$ de telle sorte que l'hypothèse de contact implique $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



1. Tenant compte de la condition de contact, exprimer z en fonction des autres paramètres et des constantes R et L.
2. Calculer par les composantes $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ de $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0)$, puis de $\vec{V}(I \in S/\mathcal{R}_0)$. Cette dernière vitesse a-t-elle une signification particulière ?

4 Théorèmes généraux

4.1 Solide-ressort

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct de référence. On supposera l'axe Ox vertical descendant. Un solide S_1 de masse M est mobile parallèlement à lui même de telle sorte que son centre d'inertie A décrive la droite fixe horizontale $O\vec{y}$. La liaison supposée parfaite entre cette droite et le solide S_1 est donc une liaison glissière d'axe $O\vec{y}$. Un ressort exerce sur S_1 une force $\vec{F} = -k\overline{OA}\vec{y}$ s'appliquant en A.

Un deuxième solide S_2 ayant la forme d'une barre AB homogène de masse m, de longueur $2a$, de centre d'inertie G, est lié à S_1 en A par une liaison rotoïde parfaite d'axe $A\vec{z}$. On définit un repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (A; \vec{x}', \vec{y}', \vec{z})$ Le système est soumis au champ de pesanteur et le mouvement reste dans le plan Oxy. On pose $y = \overline{OA}$, $\theta = (\widehat{O\vec{x}, \overrightarrow{AB}})$ mesuré autour de z.

Partie I : Cinématique et cinétique

1. Calculer les composantes dans $\mathcal{R}$ de la vitesse de G par rapport à $\mathcal{R}$.
2. Préciser les axes principaux d'inertie du tenseur d'inertie en G de S_2 ; Calculer ses composantes dans ce repère.
3. Calculer les composantes dans $\mathcal{R}$ du moment cinétique en A de S_2 en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.

Partie II : Dynamique

1. Faire le bilan des efforts extérieurs appliqués au système $S = S_1 \cup S_2$ puis au solide S_2.
2. Ecrire vectoriellement le théorème de la résultante dynamique appliqué à S en mouvement dans $\mathcal{R}$. En déduire par projection deux équations différentielles du mouvement.
3. Ecrire vectoriellement le théorème du moment cinétique en A appliqué à S_2 en mouvement dans $\mathcal{R}$. En déduire par projection une équation différentielle du mouvement.
4. Montrer que tous les efforts extérieurs appliqués à S dérivent d'une énergie potentielle que l'on calculera.
5. Calculer l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.
6. Justifier l'existence de l'intégrale première de l'énergie cinétique pour le mouvement de S. Ecrire cette intégrale première.

4.2 Plaque

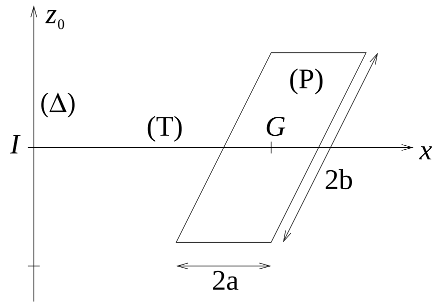
Un système matériel est constitué d'une tige de **masse négligeable** (T) autour de laquelle peut librement tourner sans glisser une plaque rectangulaire (P) homogène et pesante, de centre d'inertie G, de masse m, de cotés $2a$ et $2b$, $(a < b)$.

La tige (T) est parallèle au petit coté de la plaque et passe par G. La tige (T) rencontre un axe vertical fixe (Δ) en I. La liaison réalisée en I maintient la tige (T) constamment horizontale et lui permet de tourner librement autour de (Δ) sans glisser. On pose $\overline{IG} = l$, longueur constante. Toutes les liaisons sont supposées **sans frottement**.

Le repère absolu direct $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est choisi de telle sorte que l'axe $(O\vec{z}_0)$ soit vertical ascendant et porté par (Δ). Le repère direct $\mathcal{R} = (G; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la plaque (P) est tel que $(G\vec{x})$ soit porté par IG et orienté de I vers G, et $(G\vec{z})$ perpendiculaire au plan de la plaque. On repère la position de la plaque par ses angles d'Euler :

$\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$

$\theta = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}})$ mesuré autour de $\vec{x}$



1. Ecrire les éléments de réduction du torseur des actions de liaison de la plaque sur la tige.
2. Ecrire les éléments de réduction du torseur des actions de liaison de l'axe (Δ) sur la tige.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tige T, et en déduire que le moment en I des actions de liaison de (Δ) sur la tige est nul selon $\vec{x}$.
4. Dénombrer les inconnues des efforts de liaison du système.
5. Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (P) dans son mouvement par rapport à (T).
   Donner les éléments de réduction en I du torseur cinématique de (T) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
   Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (P) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
6. Pour le système constitué de la tige et de la plaque, écrire vectoriellement le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment cinétique en I.
7. Calculer dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ la matrice d'inertie en G de la plaque.
8. En déduire la matrice d'inertie en I de la plaque. On notera par la suite A le moment d'inertie par rapport à $(I\vec{x})$, B le moment d'inertie par rapport à $(I\vec{y})$ et C le moment d'inertie par rapport à $(I\vec{z})$.
9. Calculer le moment cinétique en I de la plaque en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
10. Déduire des questions précédentes deux équations différentielles satisfaites par $\psi(t)$ et $\theta(t)$, ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons.
11. En déduire :
    (a) $\frac{d\psi}{dt}$ en fonction de θ.
    (b) puis une équation différentielle en θ que l'on intégrera. (multiplier les deux membres de l'équation par $\frac{d\theta}{dt}$).

à suivre dans l'exercice 5.1 pour les équations de Lagrange.

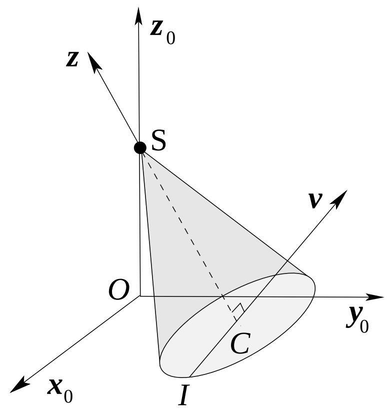
4.3 Cône de révolution

On étudie par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dont la base est orthonormée directe, le mouvement d'un cône de révolution de masse m, de rayon de base a et de hauteur a. Le cône (C) est astreint aux liaisons suivantes :

– Le sommet S est fixe sur l'axe $O\vec{z}_0$. La liaison en S est sphérique parfaite.

– Le cercle de base de centre C reste en contact en un point I avec le plan $(O\vec{x}_0\vec{y}_0)$.

On désigne par $(S; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (C). $S\vec{z}$ étant l'axe de révolution de (C), orienté de C vers S. Les paramètres servant à repérer la position du cône par rapport à $\mathcal{R}_0$ sont les angles d'Euler habituels. On pose $\overrightarrow{OS} = l\vec{z}_0$ et on notera G le centre d'inertie de (C) avec $\overrightarrow{SG} = -\frac{3}{4}a\vec{z}$.



Partie I

1. Montrer qu'au cours du mouvement l'angle θ reste constant.
2. Traduire la condition de roulement sans glissement.
3. Calculer le tenseur d'inertie en G de (C).
4. En déduire le tenseur d'inertie en S de (C).

Partie II

1. Déterminer dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ le moment cinétique en S de (C) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. Déterminer dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ le moment dynamique en S de (C) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
3. Déterminer dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ le moment dynamique en I de (C) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Partie III

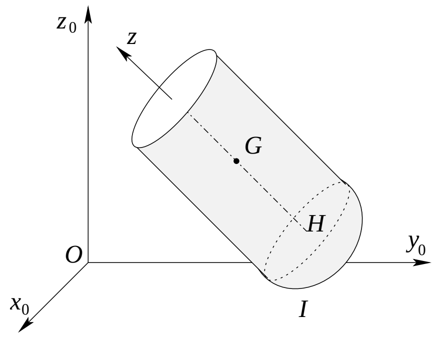
On suppose que le contact ponctuel en I a lieu sans frottement.

1. Par application du théorème du moment cinétique en S à (C), trouver deux équations différentielles donnant les variations de ψ et ϕ en fonction du temps.
2. En déduire les expressions de ψ et ϕ en fonction du temps.

4.4 Demi sphère – cylindre

Un solide de révolution S est constitué par une demi sphère S_1 et un cylindre S_2 de même base. On désigne par a le rayon de cette base et par H son centre ; la hauteur du cylindre circulaire S_2 est h. S_1 et S_2 sont des solides pleins homogènes de masse respective m_1 et m_2.

On note $H\vec{z}$ l'axe de révolution du solide S orienté de S_1 vers S_2, et $\mathcal{R} = (H; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié au solide S.



Partie I

1. Soient M la masse du solide S et G son centre d'inertie, repéré dans S par $\overrightarrow{HG} = L\vec{z}$. Calculer M et L en fonction de m_1, m_2, a et h.
2. Déterminer les composantes dans le repère $(H; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du tenseur d'inertie en H de S_1, puis en G_1 (centre d'inertie) de S_1 et en G_2 de S_2. En déduire les composantes dans le repère $(G; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du tenseur d'inertie en G de S, en fonction de m_1, m_2, a et h.

On désignera par C le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $G\vec{z}$ et par A le moment d'inertie de S par rapport à un axe issu de G et perpendiculaire à $G\vec{z}$. Dans la suite du problème on conservera les grandeurs M, L, A, C sans les remplacer par leurs expressions.

Partie II

On considère un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié a la terre, l'axe $O\vec{z}_0$ étant vertical ascendant. Ce repère est considéré comme absolu. Le solide S est situé dans le demi espace $z_0 > 0$; il est assujetti à se déplacer de telle façon que la partie hémisphérique S_1 de S soit en contact avec le plan horizontal $O\vec{x}_0\vec{y}_0$. Cette liaison de contact ponctuel est réalisée sans frottement. En outre le solide S est soumis aux actions dues au champ de la pesanteur d'intensité $-g\vec{z}_0$, g étant une constante positive, et à des efforts extérieurs représentés par le torseur dont les éléments de réduction en G sont $\vec{F} = -M\mu\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{0}$, où μ est une constante positive donnée.

On désigne par x, y, z les coordonnées de G dans le repère absolu $\mathcal{R}_0$ et par ψ, θ, ϕ les angles d'Euler qui déterminent la position par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ du repère $(G : \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à S.

1. Montrer que la coordonnée z de G dans $\mathcal{R}_0$ est donnée par : $z = a + L\cos\theta$
2. Faire une analyse complète des efforts extérieurs agissant sur S. En particulier, tenant compte du non frottement du contact ponctuel en I entre le plan Ox_0y_0 et S_1, préciser la forme du torseur des actions de liaison exercées sur S.

3. Ecrire l'équation vectorielle traduisant le théorème de la résultante dynamique appliqué à S. En déduire deux équations différentielles scalaires satisfaites l'une par x, l'autre par y. Calculer explicitement $x(t)$ et $y(t)$.
4. Ecrire l'équation vectorielle exprimant le théorème du moment cinétique en G appliqué à S. En déduire deux équations scalaires en projetant cette équation dans les directions $\vec{v}$ et $\vec{z}$.
5. Montrer que les efforts donnés agissant sur S dérivent d'une énergie potentielle que l'on calculera. Calculer l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. Justifier et écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique. Constater que l'on a bien écrit toutes les équations qui permettent de déterminer le mouvement de S.

à suivre dans l'exercice 5.2 pour les équations de Lagrange.

4.5 Une boule animée par des tiges

Soit $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct de référence lié à un bâti fixe $(\mathbf{B})$, tel que l'axe $O\vec{z}_0$ soit vertical ascendant.

Un système matériel Σ est constitué par trois solides (S_1), (T) et (S). Le solide (S_1) est formé par deux tiges rectilignes identiques, de longueur L, homogènes, de sections négligeables, soudées orthogonalement en O. Une des tiges est d'axe $(O\vec{z}_0)$ et on note m la masse de chacune des tiges. La liaison de (S_1) sur $(\mathbf{B})$ est une liaison rotoïde parfaite d'axe $(O\vec{z}_0)$. On note $\mathcal{R}_1 = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ un repére orthonormé direct lié à S_1. La seconde tige est portée par l'axe $(O\vec{u})$.

La tige (T) d'axe $P\vec{z}$, d'extrémités P et G est supposée de masse négligeable. Soit P le point lié à S_1 défini par $\overrightarrow{OP} = L\vec{u}$. (T) est en liaison rotoïde parfaite d'axe $(P\vec{u})$ avec S_1. Soit $\mathcal{R}_2 = (P; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ un repére orthonormé direct lié à (T).

Le solide (S) est une boule homogène de centre G, de rayon R, de masse M, dans laquelle on a percé, suivant un diamètre, un canal cylindrique de section négligeable. S est en liaison glissière parfaite avec (T) d'axe $P\vec{z}$. On pose $\overrightarrow{PG} = -\lambda\vec{z}$, λ restant positif au cours du mouvement. L'opérateur d'inertie en G de S est shérique, on notera A les moments d'inerties. On pose comme paramètres de position : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$; $\theta = (\vec{v}, \vec{w})$ mesuré autour de $\vec{u}$.

Un dispositif $\mathcal{D}_1$ (non représenté sur la figure), de masse négligeable, monté entre (S_1) et (T), exerce sur (T) des efforts dont le torseur est donné par ses éléments de réduction en P : la résultante $\overrightarrow{R} = \vec{0}$ et le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_P = -C\theta\vec{u}$, C constante strictement positive donnée.

Un dispositif $\mathcal{D}_2$ (non représenté sur la figure), de masse négligeable, monté entre (T) et (S), exerce sur S des efforts dont le torseur est donné par ses éléments de réduction en G : la résultante $\overrightarrow{R} = k\lambda\vec{z}$ et le moment : $\overrightarrow{\mathcal{M}}'_G = \vec{0}$, k constante strictement positive donnée.

On donnera les résultats dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$:

1. Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. Calculer l'opérateur d'inertie en O de (S_1) et l'opérateur d'inertie (en fonction de A) au point P de S.
3. Calculer le moment cinétique en G de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. Calculer le moment cinétique en O de Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

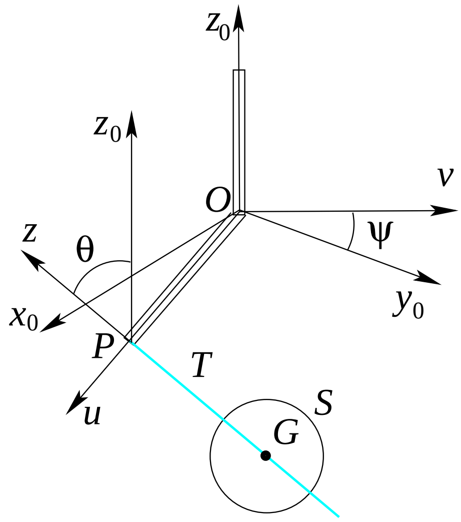


FIGURE 1 – Une boule animée par des tiges.

4. Calculer le moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. Calculer le moment dynamique en O de Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
5. Préciser l'allure des éléments de réduction en O des torseurs des actions de liaisons de $(\mathbf{B})$ sur (S_1) et de (T) sur (S).
6. $\mathcal{D}_1$ étant de masse négligeable, en déduire que le torseur des actions de $\mathcal{D}_1$ sur (S_1) est opposé au torseur des actions de $\mathcal{D}_1$ sur (T). Montrer de même que le torseur des actions de $\mathcal{D}_2$ sur (S) est opposé au torseur des actions de $\mathcal{D}_2$ sur (T).
7. Appliquer vectoriellement au point O le principe fondamental à Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. En déduire à l'aide du théorème du moment cinétique une équation du mouvement que l'on explicitera.
8. Appliquer vectoriellement au point G le principe fondamental à (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. En déduire, à l'aide du théorème de la résultante, une équation du mouvement que l'on explicitera.
9. Appliquer vectoriellement au point P le principe fondamental de la dynamique à $(S \cup T)$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. En déduire, à l'aide du théorème du moment cinétique, une équation du mouvement que l'on n'explicitera pas.

5 Equations de Lagrange

5.1 Plaque

On reprend l'exercice 4.2 que l'on va résoudre par le formalisme de Lagrange.

1. Calculer l'énergie cinétique du système. Peut-on écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique ?
2. Donner les équations de Lagrange du mouvement et en déduire, sans tenter de les résoudre, les équations différentielles déterminant les inconnues $\psi(t)$ et $\theta(t)$ du problème.

5.2 Demi-sphère – cylindre

On reprend l'énoncé 4.4 et on va le résoudre par le formalisme de Lagrange.

1. Calculer l'énergie cinétique de $(\mathcal{S})$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.
2. Déterminer les forces généralisées associé à un champ de vitesses virtuelle de Lagrange compatibles avec la condition de contact avec le plan en I.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système pour ce champ de vitesses virtuelles.
4. En utilisant un champ de vitesse virtuelle de Lagrange non compatible avec la constrainte de comptact en I, écrire les équations de Lagrange du système.

5.3 Disque avec un trou circulaire

Un système matériel (Σ) est constituée d'une plaque plane (P) et un point matériel M. La plaque a la forme d'un disque de rayon $2b$ dans lequel on a pratiqué un trou circulaire de rayon b. La circonférence limitant le trou est tangente à la circonférence limitant le disque. D désigne le centre du disque et C le centre du trou. On choisit un axe $D\vec{z}$ porté par CD orienté de C vers D. Le centre d'inertie G de (P) est sur $D\vec{z}$ et on pose $\overline{DG} = l$ (l constante positive). (P) a pour masse m et on appelle A son moment d'inertie par rapport à $G\vec{x}_0$.

Le point matériel M de masse M est astreint à se déplacer sans frottement sur le cercle de centre C et de rayon b (liaison bilatérale). (Σ) se meut dans le plan vertical fixe et repose sur une droite (Δ) horizontale fixe de ce plan par l'intermédaire d'un point I variable du cercle de centre D et de rayon $2b$.

On introduit le repère O.N.D. $O\vec{x}_0\vec{y}_0\vec{z}_0$ dans le plan fixe de telle sorte que $O\vec{y}_0$ soit porté par (Δ) et $O\vec{z}_0$ soit vertical ascendant. On choisit les paramètres suivants :

- λ tel que $\lambda\vec{y}_0 = \overline{OI}$,
- θ tel que $\theta = (\widehat{O\vec{z}_0, G\vec{z}})$,
- ϕ tel que $\phi = (\widehat{O\vec{z}_0, \overrightarrow{CM}})$.

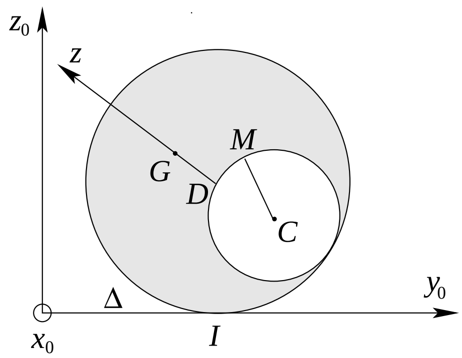


FIGURE 2 – Disque avec un trou.

Partie I

La liaison en I s'effectue sans frottement.

1. Calculer l'énergie cinétique de (Σ).
2. Etablir les équations du mouvement.
3. A-t-on l'intégrale première de l'énergie cinétique ? Si oui, on l'explicitera.

Partie II

La plaque (P) roule maintenant sans glisser sur la droite (Δ).

1. Expliciter la condition de roulement sans glissement en I.
2. En prenant un champ de vitesses virtuelles compatible avec ces conditions (sans glissement et contact plan), donne les équations de Lagrange.
3. Refaire le calcul avec un champ de vitesses virtuelles non compatible avec ces conditions. En déduire les composantes R_y et R_z, suivant $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$, de la réaction en I.

Partie III

La plaque (P) peut à nouveau glisser sur la droite (Δ). Un dispositif moteur de masse négligeable, placé entre la plaque (P) et le point M impose $\phi = \omega t$ au moyen d'un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{x}_0$.

1. Calculer la puissance du couple Γ et les équations du mouvement.
2. A-t-on l'intégrale première de Painlevé.

5.4 Tige soudée à un disque

Soit $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen, l'axe $O\vec{z}_0$ étant pris vertical ascendant. On considère le système constitué par un disque (D) auquel est soudée une tige (T).

Le disque est homogène, de masse m, d'épaisseur négligeable, de rayon r. Les moments principaux d'inertie de (D) seront notés A et C suivant respectivement un axe appartenant au plan du disque et à l'axe orthogonal au disque. Le centre d'inertie de (D) est appelé G. (D) reste en contact avec le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ en un point I.

En G, perpendiculairement au disque est fixée la tige (T). (T) est d'épaisseur et de masse négligeables. Sa longueur est $AG = r$ (r est une constante égale au rayon du disque). Le point A peut se déplacer sur l'axe Oz_0 par l'intermédiaire d'une liaison parfaite : $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{z}_0$.

La position du disque (D) est repérée par ses angles d'Euler :

On note $\vec{v}_1 = \dfrac{\overrightarrow{OI}}{|\overrightarrow{OI}|}$, $\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{u}})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$ et $\vec{v}_1 = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$.

On note $\vec{z} = \dfrac{\overrightarrow{GA}}{|\overrightarrow{GA}|}$, $\theta = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}})$ mesuré autour de $\vec{u}$ et $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$.

On note $\vec{x}$ un vecteur unitaire appartenant au plan du disque, $\phi = (\widehat{\vec{u}, \vec{x}})$ mesuré autour de $\vec{z}$ et $\vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$.

Le système est soumis au champ de la pesanteur, uniforme et de module g.

Partie I

1. Calculer la vitesse $\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.

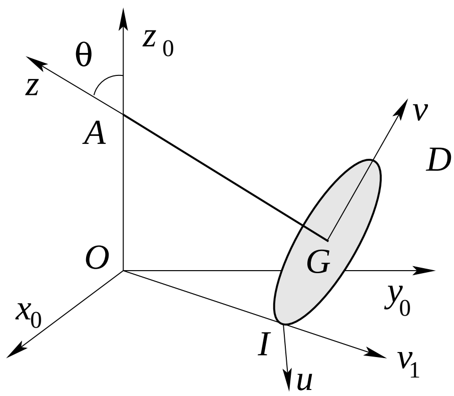


FIGURE 3 – Tige soudée à un disque.

Partie II

Le disque glisse sans frottement sur le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$.

1. Expliciter la condition $\mathcal{L}$ de contact en I.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique dans un champ de vitesses virtuelles compatibles avec la condition $\mathcal{L}$.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système dans ce CVV (champ de vitesses virtuelles).
4. Montrer que l'on peut retrouver l'équation de Lagrange E_ψ en appliquant un des théorèmes généraux de la mécanique.
5. Donner la vitesse de glissement $\vec{V}_{gl}(I, D/\mathcal{R}_0)$.
6. Ecrire les équations de Lagrange dans un CVV permettant de trouver la réaction en I du plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ sur le disque (D).

Partie III

Le disque roule sans glisser sur le plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$.

1. Expliciter les conditions $\mathcal{M}$ de roulement sans glissement en I.
2. Montrer que les conditions $\mathcal{M}$ impliquent la condition $\mathcal{L}$.
3. En utilisant un CVV non compatible avec les conditions $\mathcal{M}$, écrire les équations de Lagrange du mouvement. Montrer que l'on obtient de cette façon les composantes de la réaction du plan $O\vec{x}_0\vec{y}_0$ sur le disque (D).
4. Ecrire les équations de Lagrange dans un CVV compatible avec les conditions $\mathcal{M}$.
5. A-t-on l'intégrale de Painlevé ?

5.5 Mouvement d'un culbuto

Un culbuto ou poussah est un type de jouet traditionnel pour enfants (voir Figure 1(a)). Il s'agit d'un petit personnage dont la base arrondie est lestée de sorte que, même si le jouet est frappé ou renversé, il se redresse toujours et revient à la verticale en oscillant. On se propose d'étudier son mouvement en utilisant le modèle simplifié dans la Figure 1(b).

Le modèle simplifié est constitué de trois solides : 1). une demi-sphère de centre O, de rayon a et de masse m_s, 2). un cône de masse m_c, de hauteur h et dont le rayon de base

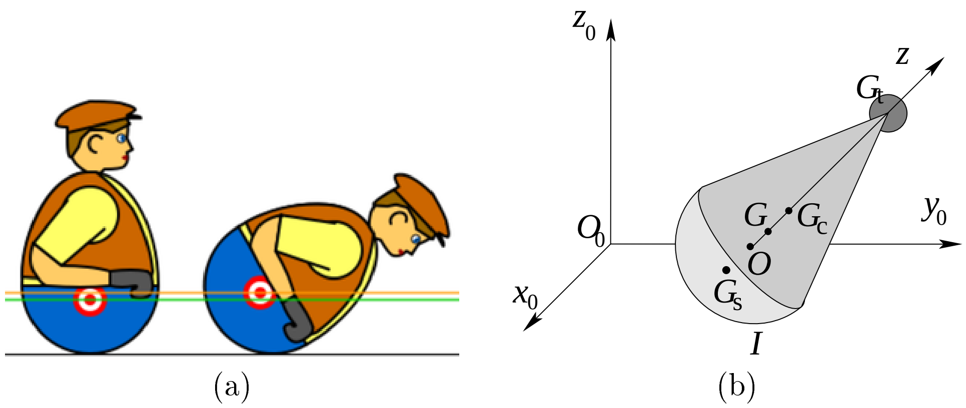


FIGURE 4 – *(a). Illustration du principe du culbuto : Lorsqu'on pousse la figurine, le centre de masse devient plus haut et n'est plus à la verticale du point de contact avec le plan (un peu à gauche dans le cas illustré). La force de la pesanteur va donc la ramèner à sa position verticale. (b). Schéma simplifié du culbuto.*

est le même que la demi-sphère et 3). une sphère de masse m_t située au sommet du cône. Pour être clair, on utilisera C (en majuscule) pour indiquer le culbuto, la lettre s pour la demi-sphère, c pour le cône, t pour la sphère représentant la tête.

Soit $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct fixe tel que $O_0\vec{z}_0$ soit vertical ascendant. Le culbuto reste toujours en contact ponctuel I avec le plan x_0y_0. On désigne $\mathcal{R} = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère orthonormé direct lié au culbuto (C).

La position du culbuto par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est définie par 5 paramètres : x, y les coordonnées de O sur les axes $O_0\vec{x}_0$ et $O_0\vec{y}_0$, et ψ, θ, ϕ les angles d'Euler habituels.

1. Rappeler la définition des angles d'Euler. Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(C/\mathcal{R}_0)$ du culbuto par rapport à $\mathcal{R}_0$ (on ne développe pas ici).

2. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(C/\mathcal{R}_0)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$. On notera le vecteur rotation dans la base du repère $\mathcal{R}_0$ par $\vec{\Omega}(C/\mathcal{R}_0) = \alpha\vec{x}_0 + \beta\vec{y}_0 + \gamma\vec{z}_0$, trouver les expressions de α, β et γ en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées premières.

   Dans la suite de l'exercice on suppose $\psi = 0$.
   Il est utile de donner ici les expressions simplifiées de $\vec{\Omega}(C/\mathcal{R}_0)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ et dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

3. On note la distance entre O et le centre d'inertie du culbuto G par $l = \overline{OG}$. Calculer $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ la vitesse du centre d'inertie G de (C) dans $\mathcal{R}_0$ et donner le torseur cinématique en G de (C) dans son mouvement par rapport $\mathcal{R}_0$.

4. Montrer que les coordonées du centre d'inertie du cône dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(0, 0, h/4)$. Calculer son tenseur d'inertie en O dans $\mathcal{R}$.

5. En déduire le tenseur d'inertie du cône en son centre d'inertie G_c dans $\mathcal{R}$. Puis expliquer (sans calcul) que le tenseur d'inertie du culbuto en G dans le repère $\mathcal{R}$ peut être écrit sous forme

$$\mathcal{I}(G, C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{G\vec{x}\vec{y}\vec{z}}$$

6. Calculer le moment cinétique de (C) en G dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ exprimé dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.
7. Faire un bilan des efforts appliqués au culbuto. On suppose que le contact en I est parfait. En appliquant les théorèmes généraux, écrire les équations vectorielles du mouvement du culbuto. On ne calcule pas la dérivée de la vitesse $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ mais on précisera les composantes du moment des efforts.
8. Calculer la puissance de tous les efforts et en déduire les forces généralisées associées aux 4 coordonnées généralisées x, y, θ et ϕ.
9. Calculer l'énergie cinétique du système.
10. Etablir les 4 équations de Lagrange.