
Collection of examination subjects

Metrology of particles

Duration: 30 minutes

All documents and calculator are permitted.

1 Questions of the course

1. **Modèle de Rayleigh et couleur du ciel:** *Sujet 2011-2012*

En appliquant le modèle de Rayleigh à la diffusion de la lumière par les particules atmosphériques, expliquer le fait que le ciel est bleu et le soleil est rouge en levant et en couchant.

2. **Polarization:**

A plane wave of amplitude E_0 polarized in the Oxz plane propagates along the axis Oz . It illuminates a homogeneous spherical particle. Express the scattered field E_{\perp}^s and E_{\parallel}^s in the far field as function of the scattering matrix elements S_1, S_2, S_3, S_4 and the observation distance r for the following cases:

- (a) the observation point is in the Oxz plane,
- (b) the observation point is in the Oyz plane,
- (c) the observation point is in the plane containing the Oz axis and makes an angle $\psi = 30^\circ$ relative to the Ox axis.

3. **Modèles optiques:** *sujet 2013-2014*

Quelles sont les conditions dans lesquelles les modèles suivants s'appliquent?

- (a) L'optique géométrique.
- (b) La théorie de Rayleigh.
- (c) La théorie de Rayleigh-Gans.

4. **Ray model:**

In what condition can the ray model (Geometric Optics) be used? Explain why this condition is necessary?

5. **Optique géométrique:** *Sujet 2011-2012*

Montrer, en optique géométrie, que l'intensité d'un rayon réfracté d'ordre $p \geq 1$ vaut $I_p = I_0 r^{2(p-1)} (1 - r^2)^2$. On précisera ce qui représentent I_0 et r .

6. **Faisceau gaussien:** *sujet 2013-2014*

Pour réaliser une expérience dans un laboratoire, on a besoin d'un faisceau laser de dimension spécifique. On fait passer un faisceau laser de longueur d'onde de $0.5145 \mu\text{m}$ à travers une lentille de focale f . Quelle est la position du col de faisceau émergent dans les deux cas suivants ?

- (a) Le col du faisceau incident est au foyer objet de la lentille.

- (b) Le rayon au col du faisceau incident est très grand devant la longueur d'onde ($w_0 \sim 5 \text{ mm}$).

7. Efficient sections:

Expliquer, selon le bilan énergétique, les notions de la section de diffusion C_{sca} , la section d'absorption C_{abs} et la section d'extinction C_{ext} . Quelle est la relation entre elles?

8. Turbidimétrie:

Quel est l'ordre de grandeur de tailles de particules (par rapport aux longueurs d'onde utilisées) mesurables par la turbidimétrie (par le spectre d'extinction)?

9. Modèle de rayons: *Sujet 2015-2016*

Le modèle de rayons est un modèle approximatif et simple pour traiter l'interaction d'une onde avec un objet. L'optique géométrique fait partie de ce modèle lorsqu'il s'agit de la lumière. Le tracé de rayons vectoriels complexes (*Vectorial Complex Rays Model - VCRM* en anglais) est une extension du modèle de rayons classique.

- (a) Dans quelle condition le modèle de rayons peut-être utilisé? Expliquer pourquoi cette condition est nécessaire?
- (b) Quelles sont les quatre paramètres décrivant les propriétés d'un rayon dans le modèle classique de rayons (optique géométrique)?
- (c) Quel est le nouveau paramètre introduit dans le modèle VCRM? Quel avantage du VCRM par rapport au modèle classique?

10. Anémométrie Phase Doppler (6pts) *Sujet 2007-2008*

L'Anémométrie Doppler Laser (ADL ou LDV - Laser Doppler Velocimetry en anglais) et PDA (Phase Doppler Anemometry) sont beaucoup utilisées pour la mesure dans le cadre de la mécanique des fluides et du spray.

- (a) Donner les composants essentiels d'un système ADL et PDA.
- (b) Que peut-on mesurer avec ADL et PDA ?
- (c) Les particules ne sont pas sphériques. Peut-on mesurer leurs vitesses ? Peut-on mesurer leurs tailles ?

11. PDA et ADL

Que peut-on mesurer avec l'Anémométrie Doppler Laser (ADL ou LDV) et l'Anémométrie Phase Doppler (PDA) ? Expliquer brièvement leur principe de mesure.

2 Ray model *Modèle de rayons*

2.1 Optique de l'arc-en-ciel *Sujet 2014-2015*

On considère une goutte d'eau sphérique, de centre O , de rayon a , placée dans l'air. L'indice de réfraction de l'air est assimilé à 1 et celui de l'eau est noté par m . On considère un rayon lumineux associé à une onde plane monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ) arrivant sur la goutte d'eau, tel qu'illustré ci-dessous. Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

1. Dans quelle condition l'optique géométrique (ou le modèle de rayons) s'applique?

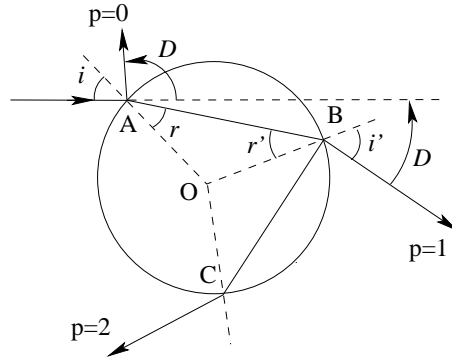


Figure 1: Principe d'Arc-en-ciel.

2. Donner la relation entre l'angle i et l'angle r et celle entre l'angle r et l'angle r' .
3. Au niveau du point B , le rayon lumineux peut-il être totalement réfléchi? Justifier la réponse.
4. Dédurre l'expression de l'angle de déviation D que subit le rayon lumineux incident en fonction de i , r et l'ordre p .
5. Montrer qu'il existe une valeur $i = i_g$, qu'on exprimera en fonction de m et p tel que :

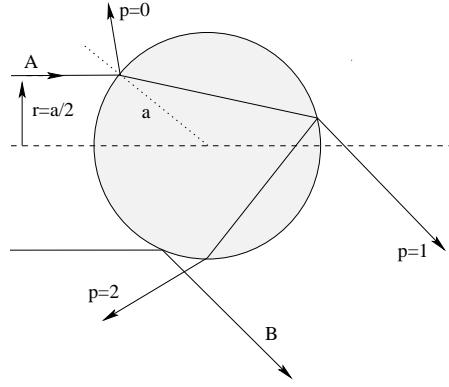
$$\frac{dD}{di}(i = i_g) = 0$$

6. Applications numérique : Evaluer i_g pour $m = 4/3$ et $p = 2$, ainsi que l'angle de D_r correspondant.
7. En fait, l'indice de réfraction de l'eau varie en fonction de la longueur d'onde (dispersion). Etudier la variation de i_r et D_r en fonction de m et expliquer le phénomène d'arc-en-ciel observé dans la nature.

2.2 Optique géométrique *Sujet avril 2014-2015*

Une goutte d'eau de rayon $a = 100 \mu\text{m}$ est éclairée par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ et d'intensité I_0 polarisée perpendiculairement. On considère un rayon lumineux A arrivant à une distance $r = a/2$ de l'axe de la sphère (voir Figure ci-dessous).

1. Estimer l'intensité de la lumière réfléchi $p = 0$ et l'intensité de la lumière réfractée d'ordre $p = 1$ et $p = 2$ sans tenir compte la divergence des rayons lumineux dus à la courbure de la surface.
2. Comparer avec l'intensité de la lumière réfléchi (rayon B) dans la même direction.
3. Reprendre les deux questions précédentes pour une onde polarisée parallèlement.
4. L'eau est polluée et elle devient absorbante. L'intensité de la lumière est diminuée à la moitié au bout de 10 cm. Déterminer la partie imaginaire de l'indice de réfraction.
5. L'effet de l'eau polluée modifie-t-il l'intensité de la lumière réfléchi et réfractée ?



Réflexion et réfraction.

2.3 Optique géométrique

Le modèle de rayons est un modèle approximatif et simple pour traiter l'interaction d'une onde avec un objet. L'optique géométrique fait partie de ce modèle lorsqu'il s'agit de la lumière. Le tracé de rayons vectoriels complexes (*Vectorial Complex Rays Model - VCRM* en anglais) est une extension du modèle de rayons classique.

1. Dans quelle condition le modèle de rayons peut-être utilisé? Expliquer pourquoi cette condition est nécessaire?
2. Quelles sont les quatre paramètres qui décrivent les propriétés d'un rayon dans le modèle de rayons classique (optique géométrique)?
3. Quel est le nouveau paramètre introduit dans le modèle VCRM? Quel avantage du VCRM par rapport au modèle classique?
4. Un rayon lumineux est incident sur une particule sphérique homogène, montrer que – l'angle de déviation du rayon émergent d'ordre p est donné par:

$$\theta = 2\tau - 2p\tau'$$

– le rapport d'intensités du rayon émergent I_p par rapport à celle de la lumière incidente I_0 est donné par

$$\varepsilon_X = \frac{I_p}{I_i} = \begin{cases} r_X^2 & p = 0 \\ r_X^{2(p-1)}(1 - r_X^2)^2 & p \geq 1 \end{cases}$$

– la différence de phase par rapport au rayon de référence passant par le centre de la particule vaut

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda}(\sin \tau - pm \sin \tau')$$

où τ et τ' sont respectivement les angles des rayons incident et réfracté par rapport à la tangente de la surface de la sphère, d son diamètre, m l'indice de réfraction et λ la longueur d'onde. X représente la polarisation (\parallel ou \perp).

2.4 VCRM

Le modèle de rayons est un modèle approximatif et simple pour traiter l'interaction d'une onde avec un objet. L'optique géométrique fait partie de ce modèle lorsqu'il s'agit de la lumière. Le tracé de rayons vectoriels complexes (*Vectorial Complex Rays Model - VCRM* en anglais) est une extension du modèle de rayons classique.

1. Dans quelle condition le modèle de rayons peut-être utilisé? Expliquer pourquoi cette condition est nécessaire?
2. Lorsqu'une onde plane éclaire une particule ellipsoïdale dans la direction parallèle à un plane de symétrie de la particule, le rayon de courbure du front d'onde de la lumière réfléchié et réfracté R'_1 peut être déterminé par l'équation de front d'onde dans le VCRM:

$$\frac{k_n'^2}{k'R'_1} = \frac{k_n^2}{kR_1} + \frac{k'_n - k_n}{\rho_1}$$

où R_1 est le rayon de courbure du front d'onde de l'onde incidente, k et k' sont respectivement les nombres d'onde à l'extérieur et à l'intérieur de la particule. k_n et k'_n sont les composantes de vecteur d'onde avant et après l'interaction du rayon avec la surface de la particule. ρ_1 est le rayon de la courbure locale de la surface de particule.

Déterminer le rayon de courbure du front d'onde de la lumière réfléchié et celui de la lumière réfractéé par une sphère de rayon $\rho_1 = a$ en fonction de l'angle incident α et l'angle de réfraction β .

2.5 Modèle de l'optique géométrique (8 pts) *Sujet 2007-2008*

L'optique géométrique est une méthode approximative. Elle est largement utilisée pour traiter l'interaction entre la lumière et les particules grâce à ses avantages d'être simple et intuitive. On se propose à examiner quelques aspects de ce modèle.

1. Dans quelle condition ce modèle peut-il être utilisé ?
2. Un rayon lumineux arrive sur une surface séparant deux milieux d'indices de réfraction différents. Les deux figures ci-dessous représentent les coefficients de réflexion en fonction de l'angle incident dans les deux cas : d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent et d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.
 - (a) A quel cas correspond chacune de ces deux figures ?
 - (b) Que représente chacune des deux courbes dans les figures ?
 - (c) Pourquoi y a-t-il un plateau dans la figure à droite à partir de $41,8^\circ$? En déduire le rapport des indices de réfraction des deux milieux.
 - (d) A quoi correspond l'angle $i = 56,3^\circ$ dans la Figure à gauche et $i = 33,7^\circ$ dans la Figure à droite ? Expliquer ce phénomène.

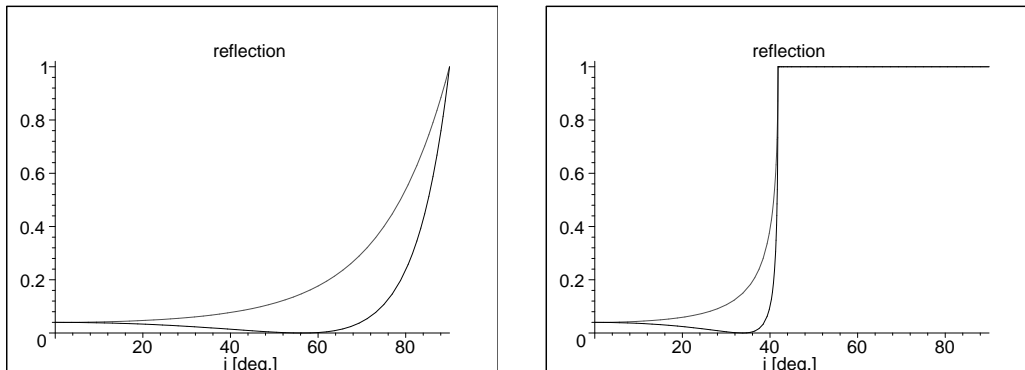


Figure 2: Coefficients de réflexion

- Un rayon lumineux de longueur d'onde $\lambda = 0,488 \mu\text{m}$ pénètre dans un milieu d'indice $m = 1,35 - 0.001i$. Quelle est la vitesse de la lumière dans ce milieu ? Quelle est la profondeur caractéristique de pénétration δ (définie par $I(\delta) = I(0)/e^2$) ?

2.6 Structure d'arc-en-ciel *Sujet 2015-2016*

La Figure 3(a) présente le diagramme de diffusion et la Figure 3(b) dessine de rayons lumineux aux alentours d'arc-en-ciel d'une particule d'eau.

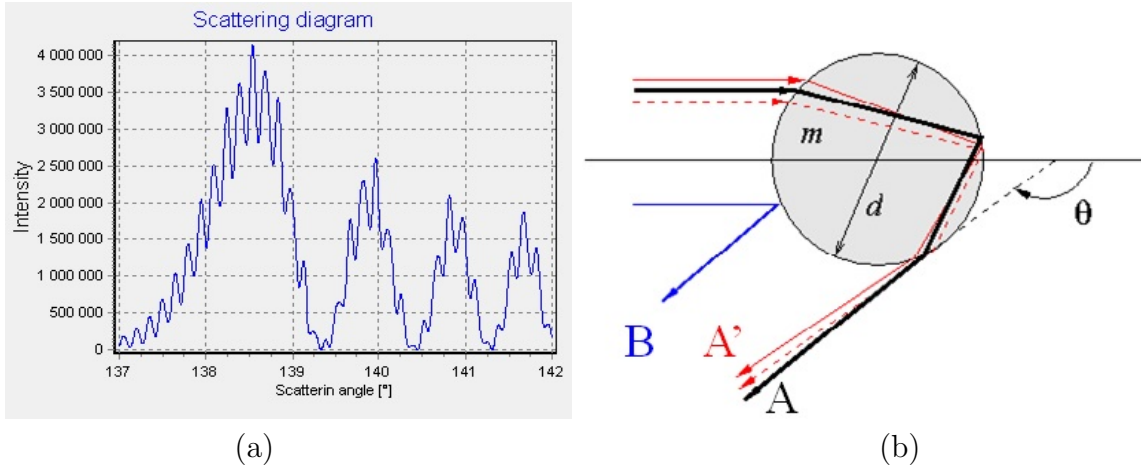


Figure 3: Etude de l'arc-en-ciel. (a). Diagramme de diffusion d'une goutte d'eau éclairée par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. (b). Schéma de rayons dans une sphère aux alentours d'arc-en-ciel.

- A l'aide de la figure 3(b) expliquer la formation de la structure de ripple (haute fréquence angulaire) et la structure d'Airy trouvées dans la figure 3(a).
- Estimer la taille de la particule.

2.7 Arc-en-ciel *Sujet 2009-2010*

On se propose d'étudier le principe de la réfractométrie d'arc-en-ciel d'une particule sphérique dans le cadre de l'optique géométrique.

- Dans quelle condition le modèle de l'optique géométrique est valable. Si cette condition n'est pas remplie, quel phénomène peut-on observer ?
- Montrer que la déviation d'un rayon lumineux est donnée par :

$$\theta = 2\tau - 2p\tau'$$

où τ et τ' sont respectivement les angles des rayons incident et réfracté par rapport à la tangente de la surface de la sphère. p est l'ordre de réfraction.

- L'arc-en-ciel a lieu dans la condition où l'angle de déviation est minimal ou maximal. Montrer que l'angle d'arc-en-ciel d'ordre $p - 1$ est donné par :

$$\theta = 2\tau - 2p \arccos(\cos \tau / m)$$

et l'angle τ est déterminé par

$$\sin \tau = \left(\frac{m^2 - 1}{p^2 - 1} \right)^{1/2}$$

où m est l'indice de réfraction de la particule.

3 Phase Doppler Anemometry

3.1 Anémométrie Phase Doppler *sujet 2010-2011*

L'Anémométrie Doppler Laser (ADL) et l'Anémométrie Phase Doppler (PDA) sont les techniques de mesure incontournables pour caractériser des écoulements et des spray.

1. Donner les éléments principaux d'un système ADL et décrire clairement son principe de mesure.
2. Que peut-on mesurer avec un anémomètre phase Doppler (PDA)? Expliquer brièvement son principe de mesure.
3. Montrer que la vitesse d'une particule V mesurée par un ADL est donnée par la relation suivante:

$$V = c \frac{a}{2 \sin b}$$

et préciser ce qu'ils représentent a , b et c dans cette formule. La vitesse V est-elle la vitesse totale de la particule ?

4. Une mesure est réalisée avec un PDA pour des particules d'eau dont l'indice de réfraction $m = 1.33$. La longueur d'onde des faisceaux incidents est de 632.8 nm et l'angle entre les deux faisceaux est de 3° . Les détecteurs se situent à 30° par rapport au plan défini par les faisceaux incidents. La fréquence et le déphasage obtenus sont respectivement de 3 MHz et 150° . Les relations entre les déphasages des signaux des deux détecteurs sont données dans la Figure 4.
5. Sachant que l'indice de réfraction d'eau est respectivement 1.337 et 1.332 pour les longueurs d'onde de 450 nm et 600 nm. Calculer les positions angulaires d'arc-en-ciel d'ordre 1 et 2 pour ces deux longueurs d'onde et expliquer pourquoi les couleurs des arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2 sont inversés.
 - (a) Déterminer la vitesse de la particule.
 - (b) On suppose que la largeur des faisceaux incidents est très grande devant la taille de la particule. Déterminer le diamètre de la particule.
 - (c) Si la largeur du faisceau incidents est petite devant la taille de la particule et celle-ci passe au-dessous des faisceaux (Figure 5). Quelle taille de particule peut-on trouver avec le même déphasage?

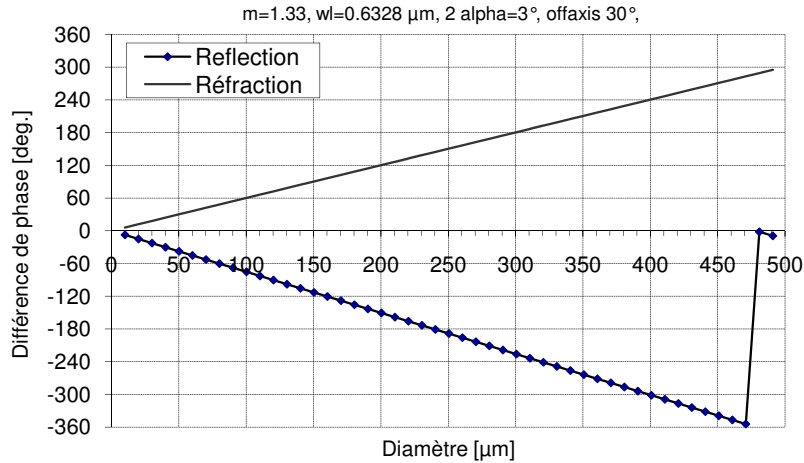


Figure 4: Relation déphasage-diamètre

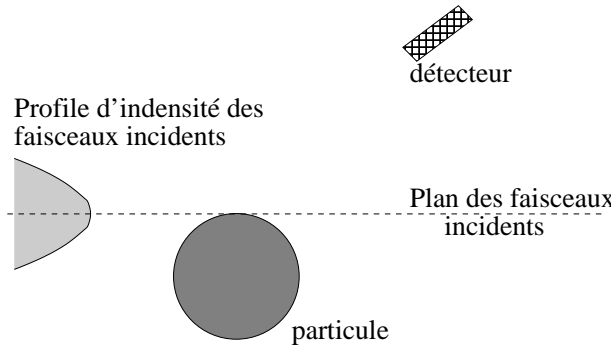


Figure 5: Éclairage par des faisceaux très focalisés.

3.2 Phase Doppler Anemometry

The Doppler Phase Anemometry (PDA) allows simultaneous measurement of the speed and size of a particle in a flow. This non-intrusive technique is based on frequency and phase difference analysis of signals detected when a particle passes in the measurement volume formed by the intersection of two laser beams.

1. What are the main elements of a PDA system? Show, using a diagram, the classical configuration of a PDA system and explain its measurement principle. The component velocity measured by the PDA will be specified.
2. A measurement is made for a water droplet of index $m = 1.33$ with a system of following characteristics:
 - the half-angle between the two beams: $\alpha = 3^\circ$ and the off-axis angle $\phi = 30^\circ$,
 - the wavelength of the laser: $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$,
 - the angle between the detectors D_1 and D_2 is 2° and the angle between D_1 and D_3 is 5° .

The relationship between the phase difference and the particle diameter for this configuration is given in Figure 6.

We obtain a frequency of $f = 2$ MHz and two phase differences 118° and 193° . Determine the speed and estimate the diameter of the particle?

3. What is measured with this technique if the particle is not spherical? Can the size of a solid particle of arbitrary shape or rough surface be measured?

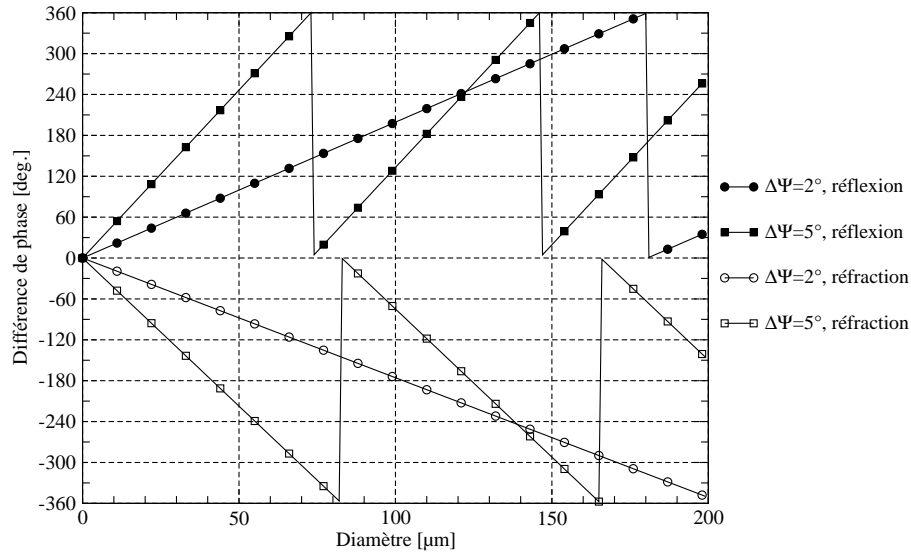


Figure 6: Relationship between phase difference and particle diameter.

3.3 Principe de PDA *Sujet 2013-2014*

L'anémométrie Phase Doppler (en anglais Phase Doppler Anemometry - PDA) permet de mesurer simultanément la vitesse et la taille d'une particule.

1. Décrire brièvement son principe.
2. Est-il possible de mesurer la taille d'une particule non-sphérique? Prendre comme exemples une particule homogène de forme sphéroïdale et une particule solide de surface rugueuse et discuter pour les deux configurations: réflexion dominante et réfraction dominante.
3. Dans un milieu dense, pour éviter d'avoir plus qu'une particule dans le volume de mesure, le faisceau laser doit être suffisamment petit. Quel problème peut-on avoir dans la configuration classique si le diamètre au col du faisceau est petit devant celui de la particule?

3.4 Anémométrie Doppler Laser

L'Anémométrie Doppler Laser (PDA) est une technique de mesure incontournable pour caractériser des écoulements et des spray. Elle permet de mesurer simultanément la vitesse et la taille d'une particule passant dans le volume de mesure.

1. Décrire clairement le principe et la configuration optique d'un anémomètre Phase Doppler (PDA) et préciser la composante de vitesse mesurée.

2. Une mesure est réalisée pour des particules d'eau d'indice $m = 1.33$ avec un PDA dont l'angle entre les deux faisceaux vaut $\alpha = 3^\circ$, l'angle off-axis ϕ est de 30° et la longueur d'onde du laser est $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$. Deux signaux enregistrés et la relation déphasage-diamètre pour cette configuration sont donnés dans les Figures 7 et 8.

- (a) Déterminer la fréquence des signaux et en déduire la vitesse de la particule.
- (b) Sachant que le délai temporel entre les deux signaux est de $1.0\ \mu\text{s}$. Déterminer le déphasage entre les deux signaux et en déduire la taille de la particule.

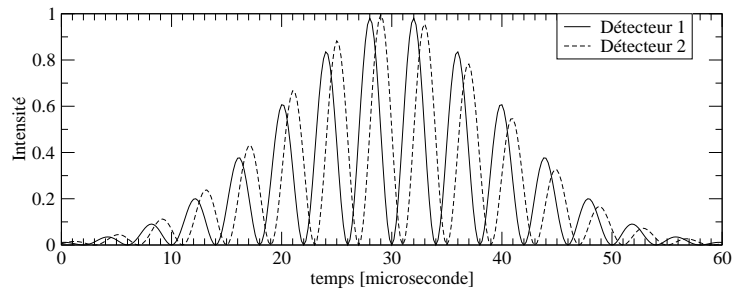


Figure 7: Signaux enregistrés

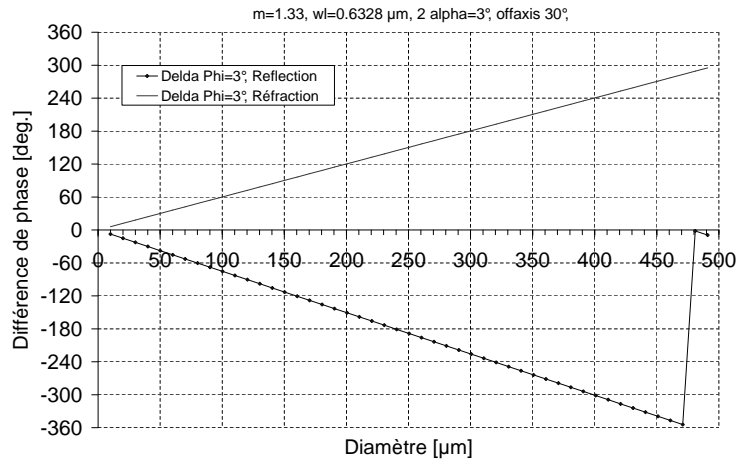


Figure 8: Relation déphasage-diamètre

4 Turbidimetry *Turbidimétrie*

4.1 Extinction de la lumière (6 pts) *Sujet 2007-2008*

La connaissance de la granulométrie des gouttelettes d'eau dans une turbine à vapeur est essentielle pour améliorer la rentabilité de la turbine et diminuer l'érosion des aubes. La

turbidimétrie est appliquée à la mesure de ces gouttes très fines (vapeur humide). On étudiera dans cet exercice son principe.

Un nuage de gouttes d'eau (indice de réfraction $m = 1,333$) d'une tranche d'épaisseur $L = 10$ mm est éclairé par un laser de longueur d'onde $\lambda = 0,6328$ μm .

1. On suppose dans un premier temps que les gouttes sont monodispersées de diamètre $d = 100$ nm. Quelle est le coefficient d'extinction des particules ?
2. La transmittance I/I_0 mesurée est de 0,8. En déduire la concentration des particules .
3. En suite, on suppose que le milieu est composé de deux populations de gouttes de diamètres de 100 nm et 1 000 nm de concentration de 10^{16} m^{-3} et 10^{13} m^{-3} respectivement. Quelle est la transmittance du milieu ?

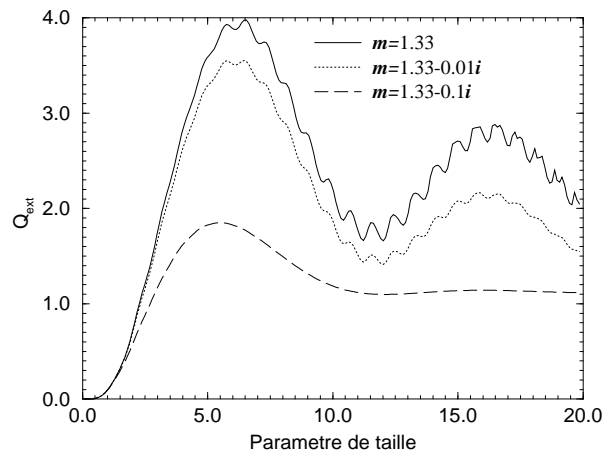


Figure 9: Coefficient d'extinction en fonction de paramètre de taille.

4.2 Poussières dans le tokamak ITER *Sujet 2014-2015*

Les poussières produites par les réacteurs de fusion par confinement magnétique (tokamak) doivent être caractérisées pour des impératifs de sûreté et des contraintes opérationnelles. La technique basée sur la turbidimétrie a des avantages singuliers par rapport aux autres techniques – accès unique et montage simple. On se propose d'étudier son principe de mesure.

La forme et la composition des particules de poussières sont très complexes. Pour simplifier le problème, on suppose que les particules sont sphériques et homogène d'indice de réfraction $m = 1.6 - 0.5i$, et qu'elles sont composées seulement de deux populations de tailles différentes dont les diamètres sont respectivement $d_1 = 0.01$ μm et $d_2 = 1.5$ μm .

Lorsqu'un faisceau lumineux traverse le milieu contenant des particules décrites ci-dessus sur un trajet de 5 m, les transmittances (rapport de l'intensité transmise par rapport à l'intensité incidente) sont $T_1 = 0.2$ pour la longueur d'onde $\lambda = 0.5$ μm et $T_2 = 0.5$ pour $\lambda = 0.9$ μm .

1. Déterminer les sections d'extinction des particules de chaque taille pour les deux longueurs d'onde données.

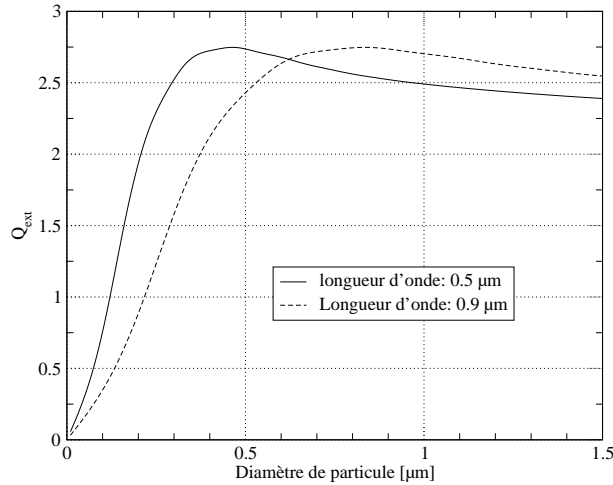


Figure 10: Coefficients d'extinction des particules ($m = 1.6 - 0.5i$).

2. Écrire le système d'équations reliant les concentrations des deux populations de particules N_1 , N_2 et les deux transmittances T_1 et T_2 .
3. En déduire les concentrations N_1 et N_2 par la résolution des équations précédemment établies.

4.3 Turbidimétrie *sujet 2014-2015*

La turbidimétrie permet de mesurer la répartition en taille d'un nuage de particules par le spectre de transmission de la lumière à travers le milieu des particules. On se propose d'étudier son principe.

1. Établir la loi de Beer-Lambert à partir du bilan énergétique de la lumière traversant le milieu d'épaisseur L qui est composé des particules monodispersées:

$$I = I_0 \exp(-C_{ext}NL)$$

et préciser ce qu'ils présentent C_{ext} et N .

2. Un nuage de gouttes d'eau d'une épaisseur de 10 cm composé des particules de diamètre de $2 \mu\text{m}$ est éclairé par un faisceau laser de longueur d'onde de 632.8 nm. La transmittance mesurée est de 80 %. Quelle est la concentration des gouttes?
3. On mélange maintenant des gouttes d'eau avec des gouttes de bière. Leurs compositions sont données dans le tableau suivant:

propriétés	diamètre	indice de réfraction	concentration
eau	$1,0 \mu\text{m}$	1,33	10^{12} m^{-3}
bière	$0,1 \mu\text{m}$	1,345	10^{15} m^{-3}

Déterminer la transmittance si le système est éclairé par un laser de longueur d'onde de $514,5 \mu\text{m}$.

5 Imagerie

5.1 Imagerie et interférence *sujet 2013-2014*

Une goutte d'eau est éclairée par un faisceau laser de rayon au col (beam waist radius) w_0 très grand devant la taille de la particule. La lumière diffusée par la particule est collectée par une lentille dans un angle $\alpha = 67^\circ$ par rapport à la direction du faisceau incident. On observe l'image dans un plan derrière la lentille. Deux images obtenues à différentes distances de la lentille sont illustrées dans la figure 1. L'intensité de diffusion prédite par l'optique géométrique donnée dans la figure 2 peut être utile pour vous aider à répondre aux questions.

1. Argumenter le choix de l'angle $\alpha = 67^\circ$.
2. Expliquer pourquoi les deux images sont différentes, notamment les deux points très lumineux dans l'image A et les franges dans l'image B.
3. Quelle est l'utilité de ces phénomènes dans la métrologie des particules?

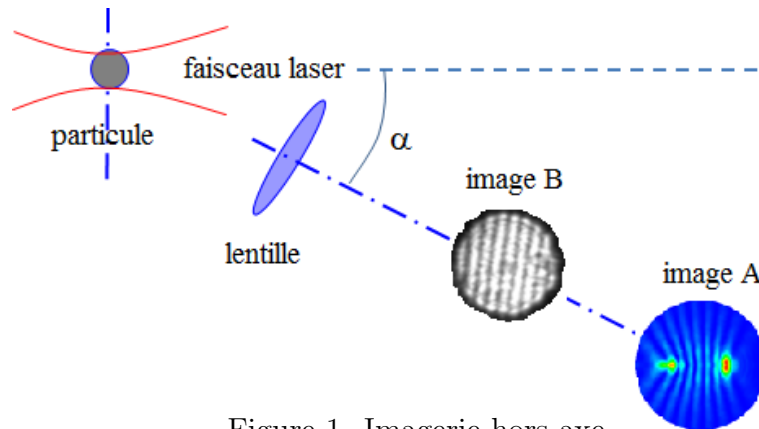


Figure 1. Imagerie hors axe.

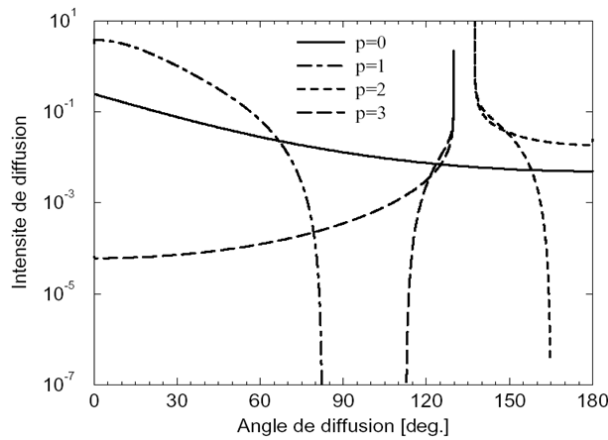


Figure 2. Intensité de diffusion de chaque ordre de rayon prédite par l'optique géométrique.