Travaux dirigés

Phénomènes vibratoires et optique

K. F. Ren

L3 IUP ME – 2016

1 Oscillations

1.1 Etude d'un oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est décrit par l'équation :

$$u(t) = 0,4\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})$$

où u et t sont exprimés en mm et s. Déterminer :

1. L'amplitude, la période, la fréquence et la phase à l'origine.
2. La vitesse et l'accélération à la date t quelconque.
3. Les conditions initiales.
4. La position, la vitesse et l'accélération à $t = 0,5$ s.
5. La représentation graphique de la position, la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

1.2 Superposition de vibrations

1. **Sommation de deux oscillations :**
   Soient deux oscillations représentées par les équations suivantes :

   $$u_1(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1), \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

   (a) Etablir l'équation horaire de l'oscillation résultante sous forme $u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ à l'aide de la représentation de Fresnel et donner les expressions de A et ϕ.

   (b) Représenter A^2 en fonction de la différence de phase $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Etudier notamment les cas où $\Delta\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ et conclure.

   (c) Etudier le cas $A_1 = A_2$

2. **Sommation de trois oscillations :**
   Soient trois oscillations représentées par les équations suivantes

   $$u_1(t) = A\cos(\omega t + \phi), \qquad u_2(t) = A\cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad u_3(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

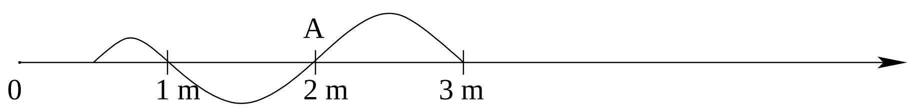
   Déterminer l'amplitude et la phase de l'oscillation résultante.

2 Ondes

2.1 Propagation d'une perturbation

Une onde sur une corde représentée ci-dessous se propage vers la droite à une vitesse de 1,8 m/s. Répondre aux questions suivantes :

1. Tracer la forme de la corde 1 seconde plus tard
2. Indiquer les parties de la corde qui bougeront vers le haut et les parties vers le bas à cet instant.
3. Quelle est, à l'instant représenté sur la figure, le sens de la vitesse verticale du point A sur la corde ?



2.2 Onde sonore

La célérité d'une onde longitudinale de 440 Hz dans l'air est de 345 m/s.

1. Quelle est la longueur d'onde et la période ?
2. Combien de temps faut-il pour que la phase change de π en un point donné de l'espace ?
3. A un instant donné, quelle est la différence de phase entre deux points situés à 0,392 m l'un de l'autre ?
4. Ecrire l'équation de l'onde sachant que l'onde se propage vers le sens des x positifs, l'amplitude D_M vaut 0,02 cm et à t =0 en x= 0, $D = -$ 0,02 cm.

2.3 Etude d'une onde sinusoïdale

Une onde transversale se propage vers la droite (sens des x positifs) à la célérité $c = 4$ m.s^{-1} le long d'une corde. A l'instant initial, la forme de la corde est donnée par :

$$D(x, 0) = 0,45 \cos(\pi x + \pi/3)$$

où D et x sont exprimés respectivement en mm et en m.

1. Représenter graphiquement $D(x, 0)$.
2. Ecrire la fonction d'onde notée $D(x, t)$ en supposant qu'il n'y a ni amortissement ni amplification.
3. Représenter graphiquement $D(x, t)$ en fonction de x à $t = 0.125$ s.
4. Reprendre les deux questions précédentes dans le cas où l'onde se propagerait dans le sens des x négatifs.

2.4 Polarisation et loi de Malus

Soit une onde transversale $\vec{S}$ dont l'équation est $\vec{S} = 2\cos\left[\pi(\frac{z}{200} - 4t)\right]\vec{j}$ exprimée dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $||\vec{S}||$ et z sont exprimés en mètres et t en seconde.

1. Déterminer la fréquence, la longueur d'onde et la célérité de cette onde.
2. Dans quelle direction et quel sens cette onde se propage-t-elle ?
3. Quel est son plan de polarisation ?
4. Un polariseur est placé sur le parcours de l'onde et son axe fait un angle de 45° par rapport à l'axe des x. Ecrire l'équation de l'onde transmise et en déduire son intensité.

2.5 Superposition de deux Ondes

Deux ondes sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} S_1(r_1, t) &= A_0 \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \\ S_2(r_2, t) &= A_0 \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

1. Que représententA_0, k, ω, ϕ_1 and ϕ_2 dans ces équations ?
2. Exprimer la période T et la longueur d'onde λ en fonction ω et k.
3. Ces deux ondes arrivent au même point et elles interfèrent. Montrer, par une méthode de votre préférence, que l'amplitude A de la vibration résultante vaut :

$$A = 2A_0 \cos\left(k\frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)$$

4. Représenter A^2 en fonction de la différence $\Delta r = r_2 - r_1$ en supposant $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Etudier les cas particuliers : $\Delta r = 0$, $\frac{\lambda}{2}$, λ, $\frac{\lambda}{2}$, 2λ et conclure.

2.6 Quelques ordres de grandeurs

1. La célérité des ondes électromagnétiques est 3×10^8 m/s. Quelles sont les longueurs d'onde de la radio AM (f = 550 kHz $\sim$ 1600 kHz), de la radio FM (f = 88 MHz $\sim$ 108 MHz) ?
2. Les fréquences fondamentales du son (c = 340 m/s) émis par un piano se situent entre 27,5 Hz et 4186,0 Hz. Quelles sont les longueurs d'onde ?

3 Diffraction et interférénce

3.1 Diffraction par une fente

On dispose d'une fente de largeur réglable. L'ouverture de cette fente est réalisée en tournant une molette, sur laquelle figurent des divisions de repérage. On souhaite établir une correspondance entre le numéro des divisions n et les largeurs de fente a. Dans ce but, on décide d'utiliser la figure de diffraction formée sur un écran parallèle au plan de la fente.

On éclaire la fente à l'aide d'un faisceau monochromatique issu d'un laser Hélium - Néon de longueur d'onde λ=632.8 nm. Ce faisceau arrive normalement au plan de la fente. Son diamètre est très supérieur à la largeur de la fente. La distance entre la fente et le plan d'observation est $D = 1,00$ m.

1. Faire un schéma montrant le principe du montage expérimental. On représentera en particulier la fente, l'écran et le trajet suivi par la lumière depuis le laser jusqu'à l'écran, dans les conditions de diffraction.

2. Dans le cadre de la diffraction par une fente, on rappelle l'expression de l'intensité reçue par l'écran :
$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)} \right]^2$$
   (a) Pour quelles valeurs de θ cette intensité est-elle nulle?
   (b) Représenter I en fonction de sinθ, on représentera 3 minima de chaque côté de la tache centrale de diffraction,
   (c) Quelle est la largeur angulaire de la tache centrale ? Quelle est la largeur des taches secondaires ?
   (d) Donner une description de l'image observée sur l'écran.

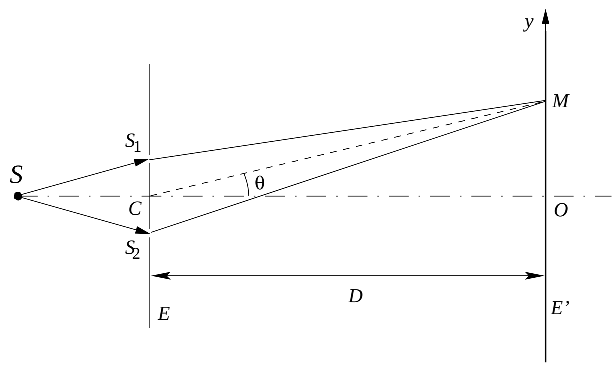
3. On fait varier la largeur a de la fente et on mesure à chaque fois la distance d séparant sur l'écran, les deux premières franges sombres qui encadrent la tache centrale. Quand on augmente le nombre de divisions affichées, on augmente la largeur de la fente. La division $n = 0$ correspond à une fente fermée ; dès qu'on tourne la molette à partir de cette valeur, la fente commence à s'ouvrir. L'ensemble des résultats obtenus est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Divisions n lues sur la molette	4	6	8	10	12	16
d (mm)	32	21	16	13	10.5	8

   (a) En remarquant que $D \gg d$ et par conséquent que l'on peut faire l'approximation $\sin\theta \simeq \tan\theta$, donner la relation liant d et a.
   (b) Déduire les valeurs de a et fournir un tableau donnant les correspondances entre n(div) et $a(10^{-2}$ mm)
   (c) Représenter sur papier millimétré la courbe d'étalonnage n en fonction de a.
   (d) Déterminer la pente de la courbe obtenue et en déduire une relation simple entre n(div) et $a(10^{-2}$ mm)

3.2 Interférence des fentes d'Young

Deux fentes parallèles S_1 et S_2 distantes de $b = 1$ mm sont percées dans un écran E. Elles sont éclairées par une fente source S disposée parallèlement aux fentes S_1 et S_2 et à égale distance de celles-ci. On observe les franges d'interférence sur un écran E' placé à une distance $D = 1$ m de E.



1. La source S émet une onde monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6328$ μm.

(a) Représenter sur un schéma la différence de marche entre les rayons issus de S_1 et S_2 et arrivant en un point M de l'écran E'.

(b) Montrer que cette différence de marche s'écrit $\delta = by/D$ (on explicitera clairement le calcul)

(c) En déduire l'interfrange i. Calculer la valeur numérique de i.

2. On remplit tout l'espace entre E et E' d'un liquide transparent d'indice n. L'interfrange devient 0,475 mm. Quel est l'indice de ce liquide ?

3. On retire tout le liquide et on place derrière chacune des fentes un tube de 2,5 cm de long muni de fenêtres en verre d'épaisseur négligeable. L'une est remplie d'air d'indice $n = 1,00029$ et l'autre est remplie par un gaz inconnu dont on désire mesurer l'indice de réfraction. En un point de l'écran on voit défiler 22 franges. Calculer l'indice du gaz.

3.3 Réseau de diffraction et spectromètre (Examen 2010)

Le spectromètre est un outil courant en énergétique. On se propose d'étudier le principe d'un spectromètre utilisant un réseau de diffraction.

On considère un réseau plan de diffraction par transmission. Il est éclairé par une onde plane de longueur d'onde λ sous incidence normale. Les fentes diffractant sont supposées infiniment fines (voir Figure 1).

1. Les ondes provenant de deux fentes consécutives peuvent être décrites par

$$E_1(r_1, t) = E_0 \cos(\omega t - kr_1), \qquad E_1(r_2, t) = E_0 \cos(\omega t - kr_2)$$

Calculer la somme des deux ondes. Etudier et représenter graphiquement la variation de l'intensité de l'onde résultante en fonction de $\delta = r_2 - r_1$.

En fait, un réseau de diffraction est constitué de très grand nombre de fentes (appelées aussi traits) et les raies de diffraction sont très fines. Dans la suite de cet exercice, on étudiera la diffraction par un réseau plan par transmission.

2. On appelle p la distance entre les deux traits. Déterminer la différence de marche δ entre les rayons diffractés par deux traits consécutifs du réseau en fonction de θ et p.

3. Pour quelles valeurs de δ l'interférence est constructive ? En déduire les angles θ_m d'ordre m dans lesquels on observe des maxima de lumière pour une longueur d'onde donnée.

4. Un réseau de diffraction comporte 300 traits/mm et il est éclairé par une source de lumière de longueur d'onde $\lambda = 0,5145$ μm. Calculer les valeurs de θ_m pour m=1, 2, 3 et 4. Quelle est l'ordre maximal que l'on peut observer?

5. Quels sont les angles de diffraction d'ordre 1 des deux longueurs d'onde extrêêmes (0,4 μm et 0,8 μm) du visible? On notera ces deux angles par α pour $\lambda = 0,4$ μm et β pour $\lambda = 0,8$ μm.

6. Une barrette CCD linéaire de 0,5 cm de large, composé de 256 pixels est installée devant le réseau (voir Figure 2). Déterminer la distance entre la barrette CCD et le réseau pour que la barrette reçoive toute la lumière diffractée d'ordre 1 du visible.

7. Montrer que la correspondence entre la longueur d'onde et le numéro de pixel N est donnée par

$$N = 256 \frac{\arcsin(\lambda/p) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

8 Maintenant le réseau est éclairé avec une lampe au mercure qui émet de la lumière de longueurs de 0,5790 μm, 0,5461 μm, 0,4358 μm et 0,4047 μm. Calculer les numéros des pixels qui reçoivent les raies de ces longueurs d'onde.

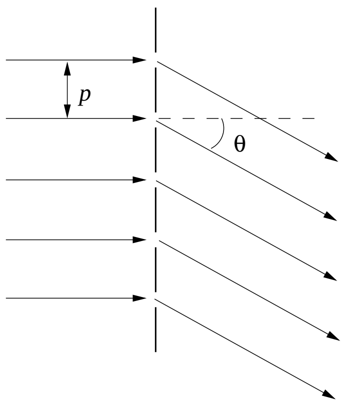


Figure 1. Réseau de diffraction

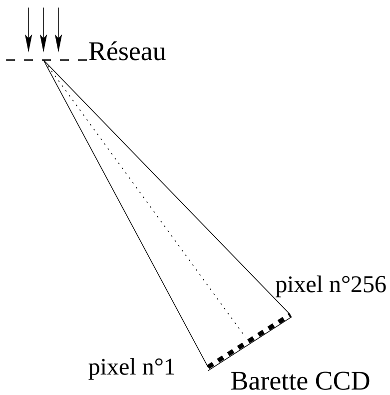


Figure 2. Pincipe du spectromètre

4 Optique géométrique

4.1 Fibre optique

Une fibre optique est constituée par un cœur transparent d'indice n_1 entouré par une gaine mince d'indice n_2. Elle est plongée dans un milieu d'indice n_0. La fibre est non courbée, R est un rayon lumineux situé dans un plan contenant l'axe de la fibre.

1. Montrer que R ne peut se propager dans la fibre que si son angle d'incidence θ sur l'extrémité de la fibre est inférieur à θ_{max} tel que $n_0 \sin\theta_{\max} = \left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}$, ce que on l'appelle ouverture numérique de la fibre.

2. Calculer θ_{max} pour une fibre optique. On donne $n_0 = 1$, $n_1 = 1.55$ et $n_2 = 1.45$.

3. Quel est l'angle incident maximal θ_{max} pour une fibre de verre nue ($n_1 = 1.55$ et $n_2 = 1.0$)?

4.2 Image formée par un miroir plan*

1. Construire l'image d'un point objet A donnée par un miroir plan.

2. Une personne de 1,80 m se regarde dans un miroir plan. Ses yeux sont à 10 cm du sommet de sa tête.

   (a) Quelle doit-être la taille minimale du miroir pour que cette personne se voie en entier ?

   (b) Quelle est la position du miroir par rapport au sol ?

   (c) Cette personne voit flou au-delà de 4 m. A quelle distance maximale du miroir doit-elle se placer pour voir son image entièrement nette ?

4.3 Formation d'image par une lentille

A. Construction géométrique :

Un objet de hauteur $AB = 1.0$ cm est placé devant une lentille, perpendiculairement à l'axe optique. Le point A est sur l'axe à 10 cm du centre optique.

1. La lentille est convergente, de distance focale de 5 cm.
   (a) Construire l'image $A'B'$ de AB donnée par la lentille.
   (b) Déterminer la nature, la taille, le sens et la position de l'image.
2. Répondre aux mêmes questions pour une lentille divergente de distance focale de -2.5 cm.

B. Relation de conjugaison :

Une lentille divergente de distance focale de 10 cm donne d'un objet une image trois fois plus grande. L'image étant réelle, quelles sont les positions de l'objet et de l'image ? Quelle est la nature de l'objet ? Faire un schéma.

4.4 Lunettes à double foyer

Vous avez sans doute vu ce type de lunettes, le plus souvent utilisées par des personnes âgées. On peut les assimiler à deux lentilles minces superposées, l'une dans la partie haute du verre et l'autre dans la partie basse. Chez la personne qui nous intéresse :
– le punctum proximum (P.P.) est éloigné à 1m
– le punctum remotum (P.R.) est rapproché à 5m
Dans ce problème, les centres optiques des yeux et des lunettes sont supposés confondus.

A. **Vision de près :**
Le journal quotidien, placé à 25 cm, est *trop près* pour être lu sans lunettes.

1. Quelle est la distance lentille – objet ?
2. A quelle distance devra se trouver l'image du journal fournie par les lunettes pour que l'œil voit nettement le journal?
3. En déduire la distance focale et la nature de la lentille utilisée.
4. Après correction de la vue de près par cette lentille, quelle est la nouvelle position du punctum remotum ?

B. **Vision de loin :**
La cabane, au fond du jardin, se trouve à 50 m , donc *trop loin* pour être vue nettement.

1. A quelle distance devra se trouver l'image de la cabane fournie par les lunettes pour que l'œil voit nettement la cabane?
2. En déduire la distance focale et la nature de la lentille utilisée.

4.5 Appareil photo - téléobjectif (Examen 2008)

A. Appareil photo de focale fixe

L'objectif d'un appareil photo est assimilé à une lentille convergente L_1 de distance focale $f_1' = 60$ mm. On photographie avec cet appareil une tour AB de 50 m de haut située à une distance de 1000 m de la lentille L_1.

1. Déterminer la position de l'image A_1B_1 donnée par cette lentille.
2. Quelle est la taille de l'image de la tour?

B. Téléobjectif

Afin d'obtenir une image plus grande de la tour, on réalise un téléobjectif en intercalant une deuxième lentille L_2, divergente, de distance focale $f_2' = -35$ mm , entre la lentille L_1 et le film. La distance entre L_1 et L_2 est 30 mm. On désigne par A_1B_1 l'image que forme la lentille L_1 de l'objet AB, en l'absence de L_2. A_1B_1 joue le rôle de l'objet virtuel pour la lentille L_2 qui en forme une image définitive $A'B'$.

1. Faire un schéma montrant la formation de l'image $A'B'$ à travers le téléobjectif (on pourra simplifier en faisant apparaître L_1, L_2, A_1B_1, $A'B'$ mais pas AB).
2. Quelle est la distance entre l'image intermédiaire A_1B_1 et la lentille divergente L_2.
3. Déterminer la position de l'image définitive $A'B'$ par rapport à la lentille L_2.
4. Quelle est la taille de l'image $A'B'$?

5 Émission et détection

5.1 Lampes d'éclairage

Les deux types de lampes d'éclairage les plus courants sont les lampes tungstène et les lampes économie. Certaines caractéristiques de ces lampes sont données dans le tableau suivant[1].

	Puissance (W)	Flux lumineux (lm)	Intensité lum. (cd)	Efficacité (lm/W)	Eclairement (lm/m^2)	Durée de vie (h)	prix (euros)
tungstène	40	370				1000	0.55
	100	1200				1000	0.55
économie	8	420				8000	4.80
	18	1100				8000	4.80

1. Supposant que l'émission est uniforme dans toutes les directions, calculer pour chaque lampe les grandeurs suivantes et les inscrire dans le tableau :
   (a) l'intensité lumineuse (cd=lm/sr).
   (b) l'éclairement lumineux (lx=lm/m^2) à 2 m de la lampe.
   (c) le rendement (efficacité) lumineux.
2. Lequel des deux types de lampes est le plus économique ? Pour comparer on calculera le coût par lumen·heure sachant que le prix électricité est de 0.12 euros/kWh TTC.
3. La lampe de tungstène peut être considérée comme un corps noir et sa température est de 2400 K pour celle de 40 W et 2600 K pour celle de 100 W. Déterminer la longueur d'onde d'émission maximale selon la loi de Wien : $\lambda_{max}T$=2897 (μm.K).
4. Expliquer la différence de rendements des deux types de lampes par leurs spectres lumineux émis.

5.2 Meilleur distance d'une lampe

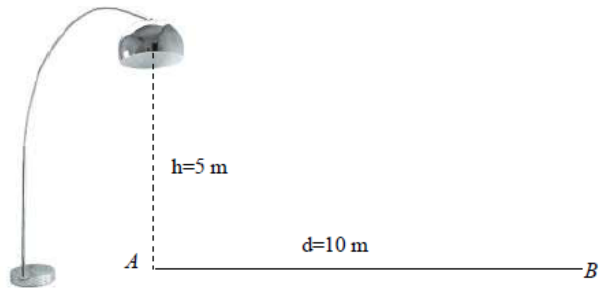
On suspend une lampe à une hauteur h au dessus d'une table ronde de rayon R. Quelle doit être la hauteur h pour qu'un objet (plan horizontal) situé au bord de la table soit le mieux éclairé possible ? L' éclairement lumineux en un point est inversement proportionnel au carré de la distance séparant la source lumineuse et le point, et proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence.

[1]Les données sont trouvées sur les étiquettes dans le magasin Carrefour le 2008

5.3 Lampadaire

Un lampadaire peut être considéré comme une source de lumière qui éclaire homogénèrement un demi-espace inférieur comme illustré dans la figure ci-dessous. On veut que l'éclairemnt sur le chaussée au pied (point A) du lampadaire soit de 10 lm.

1. Que doit être la puissance de lampoule dans les deux cas:
   - une lampe tungstène d'efficacité lumineuse de 10 lm/W;
   - une lampe économique d'efficacité lumineuse de 60 lm/W.
2. Quel est l'éclairement sur la chaussée à 10 m du pied (point B)?



5.4 Effet photoélectrique

On éclaire une cellule photoélectrique avec un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde 400 nm et de puissance 0,5 W.

1. Calculer l'énergie d'un photon.
2. Déterminer la vitesse des électrons photo-émis, si le travail d'extraction vaut 2,4 eV.
3. Quel est le nombre de photons par seconde dans le faisceau incident ?
4. Quelle est l'intensité du courant de saturation si le rendement quantique de la cellule est 1% ?

On donne : $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C ; $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s ; $c = 3 \times 10^{8}$ m/s ; $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg

5.5 Transmission par une fibre optique

La fibre optique est utiliée souvent pour transporter de la lumière dans beaucoup d'instruments de mesure optique. On propose d'étudier le taux de l'énergie transportée par une fibre optique et on suppose que le faisceau incident est parallèle à l'axe de la fibre optique.

1. Un faisceau laser de 5 W est injecté à l'entrée d'une fibre optique d'indice de réfraction 1.5. Le faisceau est perpendiculaire à la surface d'entrée de la fibre. Déterminer la puissance de la lumière transmise dans la fibre.
2. La longueur de la fibre est de 5 m et l'atténuation de la fibre est de 0.01 dB/m, en déduire la puissance du faisceau à la sortie de la fibre.

5.6 Saisons

Le phénomène des saisons résulte de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de son orbite autour du Soleil. Cet axe fait un angle de $23°27'$ en moyenne avec la perpendiculaire à ce plan. Au cours de l'année, il conserve une direction fixe dans l'espace. L'énergie reçue dépend de latitude où on se trouve sur la terre, d'une part la durée d'éclairement du soleil et d'autre part l'inclinaison des rayons solaires par rapport à la terre.

1. Sachant que la puissance totale rayonnée par unité de surface du soleil est de 6.3×10^7 W/m^2 et le diamètre du Soleil est de $1,39 \times 10^9$ m, calculer la puissance totale émise par le Soleil.

2. La distance Terre-Soleil est de 1.49×10^{11} m, en déduire l'éclairement (la puissance de rayonnement reçue par unité de surface perpendiculaire au rayonnement) en limite supérieure de l'atmosphère terrestre.

3. On assimile l'atmosphère par une couche de 10 km d'épaisseur autour de la terre dont le coefficient d'extinction k est de 0,102 km^{-1}. Les midis aux solstices d'été et d'hiver, les rayons solaires frappent le sol à Rouen respectivement à $26°$ et $72°54'$ par rapport au zénith. Calculer les éclairements correspondants au niveau du sol.

4. En prenant en compte l'éclairage incliné sur le sol, calculer la puissance totale reçue sur une surface de 10 m^2 à Rouen le midi au solstice d'été et le midi au solstice d'hiver.

5. La journée en été est plus longue qu'en hiver. La journée la plus courte j_c et la plus longue j_l dans l'année se calculent selon la latitude β par :

$$j_c = \frac{24}{180°} \arccos(\tan\alpha \tan\beta) \qquad \text{et} \qquad j_l = 24 - j_c$$

   où $\alpha = 23.45°$ est l'angle de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de son orbite. Déterminer la journée la plus longue et la plus courte à Rouen (latitude $49.43°$) et estimer le rapport d'énergie reçu en été et en hiver.

6. Expliquer le phénomène des saisons.