L2 PMSI

Mathématiques Appliquées

Travaux dirigés et formulaire

K. F. Ren

Faculté des Sciences et Techniques
Université de Rouen

2016-2017

Travaux dirigés

1. Opérateurs différentiels

1. En coordonnées polaires, la tangente d'une courbe est définie par l'angle α qu'elle forme avec le rayon vecteur. Démontrer que : $\tan\alpha = \dfrac{\rho}{\rho'}$ avec $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$
2. Un axe quelconque est défini par un vecteur unitaire $\vec{u}$. On note $\theta = (Ox, \vec{u})$. Montrer que $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$. Déterminer $d\vec{u}$ en grandeur et direction.
3. Le potentiel d'un dipôle est donné en coordonnées polaires par :

$$V(\rho, \theta) = \frac{Kaq\cos\theta}{\rho^2}$$

   où q est la charge et a la distance séparant les charges. Calculer son champ électrique et le représenter sur l'axe du dipôle et sur l'axe perpendiculaire passant par son centre.
4. Calculer les composantes de la normale à la surface S définie par :

$$x^2y + 2xz - 4 = 0$$

   au point $P(2, -2, 3)$. En déduire l'équation du plan tangent en P.
5. On suspend une lampe à une hauteur h au dessus d'une table ronde de rayon R. Quelle doit être la hauteur h pour qu'un objet (plan horizontal) situé au bord de la table soit le mieux éclairé possible ? L'éclairement lumineux en un point est inversement proportionnel au carré de la distance séparant la source lumineuse et le point et proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence.
6. Soit le champ de vecteurs :

$$\vec{A} = yz^2\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$$

   Vérifier que : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$.
7. Soit : $\vec{E} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, calculer : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$. Trouver la fonction U pour que $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$
8. Représenter les champs vectoriels : 1). $\vec{A}_1 = x\vec{i}$, 2). $\vec{A}_2 = y\vec{i}$ et 3). $\vec{A}_3 = \rho\vec{e}_\theta$, les deux premiers sont donnés en cartésiennes et le dernier en polaires. Déterminer leur rotationnel et divergence.
9. Soit une forme différentielle ω telle que :

$$\omega = (2x - y)dx + (2y - x)dy$$

   Trouver, s'il existe la fonction $f(x, y)$ telle que $df = \omega$.
10. Démontrer en utilisant les coordonnées cartésiennes que :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(f\vec{A}\right) = \vec{\nabla}f \wedge \vec{A} + f\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

2. Intégrales curvilignes

1. Calculer la longueur de la courbe $y = f(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $f(x) = 2x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
2. On considère la surface de révolution engendrée par la rotation d'un arc AB d'équation $y = y(x)$ autour de l'axe Ox. Montrer que son aire s'écrit :

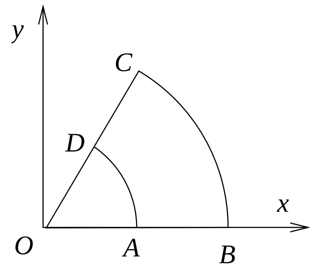
$$S = 2\pi \int_{AB} y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

   Application : Calculer l'aire engendrée par la rotation de l'arc de cubique $y = x^3$ autour de l'axe Ox entre $x = 0$ et $x = 2$.
3. Calculer le travail de la force :

$$\vec{F}_1 = -y\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

   sur ADB où $A(\sqrt{2}, 0)$ et $D(1, 1)$ sont sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$ et DB est l'arc qui joint D à $B(-1, 0)$ sur la parabole. $2y^2 = x + 1$.
   Même question pour : $\vec{F}_2 = -2xy\vec{i} - x^2\vec{j}$.
4. Le plan est repéré en coordonnées polaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$. On considère la force $\vec{F}$ de composantes :

$$F_\rho = \frac{2\cos\theta}{\rho^3}, \qquad F_\theta = \frac{\sin\theta}{\rho^3}$$



   (a) Représenter cette force aux points (1,0), (1,1) et (0,1) (les coordonnées sont données ici en cartésiennes).
   (b) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le trajet $ABCD$ représenté sur la figure. C et D sont situés sur la droite passant par l'origine et faisant un angle de $\pi/3$ avec Ox. BC et DA sont des arcs de cercle de centre O dont les rayons sont respectivement 1 et 2.
   (c) La force $\vec{F}$ dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? Si oui laquelle ? Calculer la circulation de $\vec{F}$ sur l'arc d'ellipse joignant B et D dans le sens BD.
5. Soit un cercle (O, R) chargé portant de manière uniforme une charge q. Une charge q' est placée sur l'axe du cercle à la distance h de O. On rappelle que la force exercée par une charge q_A située en un point A sur une charge q_B en B s'écrit :

$$\vec{F} = K q_A q_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}^3}$$

   Calculer la force exercée par le cercle sur la charge q'.
6. (CC déc. 2007) Un champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho^3}(2\cos\theta\vec{e}_\rho + \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

   (a) Représenter le champ $\vec{E}$ aux points $A(1, 0)$, $B(1, \frac{\pi}{3})$, $C(2, \frac{\pi}{2})$ et $D(1, -\frac{\pi}{3})$, où les coordonnées sont données en polaires (ρ, θ).
   (b) Existe-t-il un potentiel pour $\vec{E}$? Si oui, trouver-le. Sinon, expliquer pourquoi.
   (c) Calculer le travail de la force de ce champ électrique exerciceée sur une charge q ($\vec{F} = q\vec{E}$). Cette charge q se déplace dans le champ du point A au point B suivant le cercle de centre O, puis du point B au point D selon un circuit défini par $\rho = 2\cos\theta$.

7. (Examen jan. 2007) Un fil rectiligne infini est modélisé par un tube de courant d'axe Oz et de rayon a, parcouru par un courant volumique uniforme : $\vec{j} = j\vec{e}_z$. On rappelle que le champ magnétique engendré par cette distribution de courants est donné par :

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 j \dfrac{\rho}{2} \vec{e}_\theta & \text{si} \quad \rho \leq a \\ \vec{B} = \mu_0 j \dfrac{a^2}{2\rho} \vec{e}_\theta & \text{si} \quad \rho \geq a \end{cases}$$

   (a) Montrer que la divergence de $\vec{B}$ est nul.
   (b) Il existe donc un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. En supposant que $\vec{A}$ s'écrit sous forme $\vec{A} = A(\rho)\vec{e}_z$. Déterminer $A(\rho)$ pour $\rho \leq a$ et $\rho \geq a$ en prenant $\vec{A} = \vec{0}$ en $\rho = a$.
   (c) Le même fil est supposé porter la charge volumique uniforme ρ_e. Le champ électrique $\vec{E}$ s'écrit sous forme $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$. En appliquant le théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$, déterminer le champ électrique créé par la charge en utilisant la relation donnée ci-dessus pour $\rho \leq a$ et $\rho \geq a$.
   (d) Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire U et on déterminera ce potentiel.

3. Intégrales multiples

1. Calculer : $\iint_D (x^2 + y)dxdy$ sur les domaines :
   (a) $1 \leq x \leq 2$; $3 \leq y \leq 4$;
   (b) l'intersection entre $y = x^2$ et $x = y^2$;
   (c) $x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0$.
2. Soit le domaine $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}$; Calculer : $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$
3. Soit D la partie du plan comprise entre les ellipses d'équations : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$ et $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mu^2$. Calculer :

$$J = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}} dxdy$$

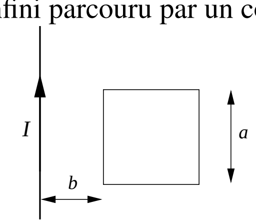
4. Calculer le volume d'un cône de demi angle au sommet α et de hauteur h (coordonnées cylindrique).
5. Calculer le volume du domaine D limité par la sphère $x^2+y^2+z^2 = a^2$ et le cône $x^2+y^2 = z^2$ (coordonnées sphériques).
6. Un volume élémentaire dV centré sur un point M a pour masse $dm = \mu dV$. Cette masse crée en un point P un potentiel dU donné par :

$$dU = \frac{K\mu}{d} dV$$

   où $d = \overline{MP}$. On considère une demi sphère homogène de rayon R et d'axe de symétrie z et un point P sur cet axe.
   (a) Calculer le potentiel créé par la demi sphère en un point P extérieur ($z_P = h > R$)
   (b) Même calcul dans le cas d'une sphère homogène. Conclusion ?
7. Calculer le moment d'inertie d'une plaque elliptique par rapport à un des axes de symétrie.
8. Calculer la position du centre de gravité d'une demi sphère homogène.
9. Calculer : $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ où D est le premier quadrant. En déduire la valeur de : $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

10. Sachant que le champ magnétique créé par un fil de longueur infini parcouru par un courant I, aligné le long de l'axe z, en un point distant de r du fil s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\theta$$



Calculer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce fil à travers un cadre carré de coté a, situé à la distance b du fil. Le cadre se trouve dans un plan passant par le fil.

11. On considère dans le plan un domaine D sans trou et deux fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ continues sur D. Soit C le circuit frontière de D. En intégrant $\frac{\partial P}{\partial y}$ sur le domaine D montrer que :

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_{C+} P(x,y)dx$$

En déduire que (théorème de Green – Riemann) :

$$\oint_{C+} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Application : soit la force $\vec{F} = (x^2+y)\vec{i} + xy\vec{j}$. Calculer son travail sur le circuit $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $O(0,0)$.

12. (Examen sept. 2007) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a > 0$, A et B les points $(-a,a)$ et (a,a) respectivement. On désigne par C le contour formé du segment $[AB]$ parcouru de A vers B, et de la demi-circonférence de diamètre $[AB]$ située au-dessus de $[AB]$ parcourue de B vers A, et $\mathcal{D}$ le domaine intérieur à C.
   (a) Calculer la circulation $\mathcal{S}$ du vecteur $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xy(2a-y)\vec{j}$ le long du contour C,
   (b) Calculer le flux Φ du champ vectoriel $\vec{T} = (-x^2 - y^2 + 2ay)\vec{k}$ à travers le domaine $\mathcal{D}$,
   (c) Montrer par le théorème de Stokes que $\mathcal{S} = \Phi$.

4. Intégrabilité

1. Étant donné une fonction de trois variables $f(u,v,w) = 0$, montrer que il existe la relation :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_w \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)_u \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)_v = -1$$

2. Sachant que :

$$dE = CdT + (l - P)dV$$

et

$$dS = \frac{C}{T}dT + \frac{l}{T}dV$$

sont des différentielles totales, en déduire que :

$$l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

3. La forme différentielle dQ peut s'écrire en fonction de T et V

$$dQ = C_V dT + ldV$$

ou en fonction de T et P

$$dQ = C_P dT + hdP$$

démontrer que :

$$l = (C_P - C_V)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

Formulaire des mathémathiques appliquées

Systèmes de coordonnées

dans un plan :

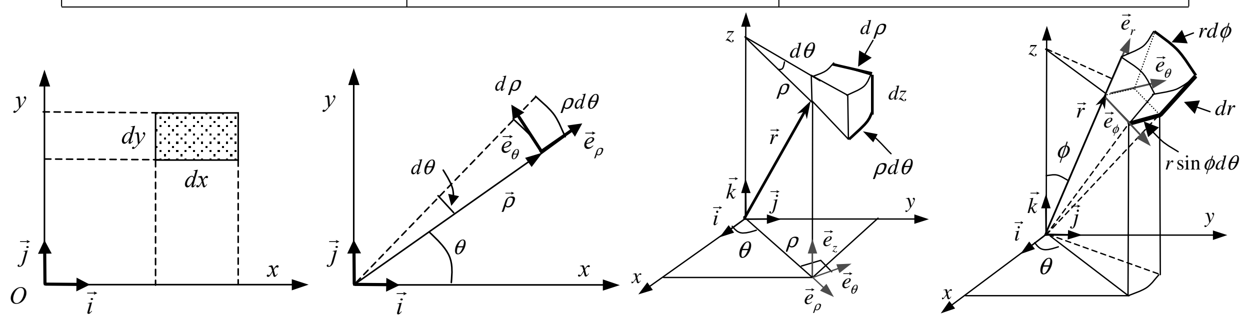
Système de coordonnées	cartésiens	polaires :
Vecteur position :	$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j}$	$\vec{\rho} = \rho\vec{e}_\rho$
Élément de déplacement :	$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$	$d\vec{l} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta$
Élément de surface :	$dS = dxdy$	$dS = \rho d\rho d\theta$
Équations de transformation :	$x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$	$\vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

dans l'espace :

Coordonnées cartésiennes

– Vecteur position : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
– Élément de déplacement : $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
– Élément de volume : $dV = dxdydz$

Système de coordonnées	Coordonnées cylindrique	Coordonnées sphériques
Vecteur position :	$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$	$\vec{r} = r\vec{e}_r$
Élément de déplacement :	$d\vec{l} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$	$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\phi\vec{e}_\phi + r\sin\phi d\theta\vec{e}_\theta$
Élément de volume :	$dV = \rho d\rho dz d\theta$	$dV = r^2\sin\phi dr d\phi d\theta$
Éqs de transformation :	$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$	$x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$
vecteurs unitaires	$\vec{e}_z$ est constant, mais $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de l'angle θ	$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent tous des angles ϕ et θ



Opérateurs différentiels :

Formules de calcul

Dans le système de coordonnées cartésiennes :

Gradient : $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$

Dans le système de coordonnées cylindriques :

Gradient : $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$ Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$

Dans le système de coordonnées sphériques :

Gradient : $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

Divergence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\left(\sin\phi A_\phi\right)}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial A_\theta}{d\theta}$

Rotationnel : $\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial(\sin\phi A_\theta)}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right]\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right]\vec{e}_\theta$

Propriétés

- Le gradient $\vec{\nabla} f$ est perpendiculaire à l'iso-surface $f(x,y,z) = C$.
  Conséquence : La normale de la surface décrite par $f(x,y,z) = 0$: $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$
- Le rotationnel d'un gradient est toujours nul : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) \equiv 0$.
  Conséquence : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists U$ tel que $\vec{A} = \vec{\nabla} U$, U est le potentiel du vecteur $\vec{A}$.
- La divergence d'un rotationnel est toujours nul : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \equiv 0$,
  Conséquence : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, $\vec{A}$ est appelé le potentiel vectoriel de $\vec{B}$.

Intégrales

Intégrales curvilignes

- **Intégrale scalaire :** $l = \int_A^B f(M)ds$. l'élément de la longueur : $ds = \|\vec{dl}\|$
  Exemple : une courbe dans un plan : $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx = \sqrt{1 + (d\rho/d\theta)^2}d\theta = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}dt$.
- **Intégrale vectorielle** (circulation d'un champ vectoriel, travail d'une force) : $I = \int_{AB} \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Intégrales doubles

- **Flux d'un vecteur** $\vec{A}$ à travers une surface S : $\Psi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$,
- **Changement de variables :** $I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(u,v)|J|dudv$

Théorèmes

- **Théorème de Stokes :** $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_D \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S}$
  Application : Si $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$, l'intégrale $\int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$ ne dépend que des points de départ et arrivée.
- **Théorème de Green-Ostrogradsky :** $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV$