Examen du 10 mai 2016

Mécanique générale

Durée : 2 heures

[illegible] .

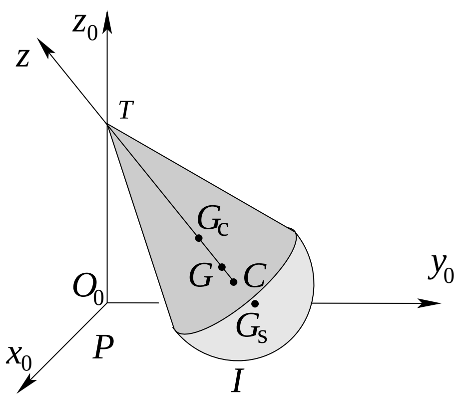
Un système Σ est constitué par une demi-sphère homogène S_s de centre C, de rayon a et de masse m_s, et un cône aussi homogène S_c de sommet T, de la même base, de hauteur h et de masse m_c (voir la figure ci-dessous).

Soit $\mathcal{R}_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, considéré comme la référence absolue, où l'axe $\vec{z}_0$ est vertical ascendant et $\mathcal{R} = (C; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à Σ avec l'axe z passant par T. Les orientations des axes de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ sont définies par les angles d'Euler habituels ψ, θ, ϕ. On se propose d'étudier les mouvements de Σ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

On suppose que le sommet du cône T est maintenu fixe sur l'axe $O_0\vec{z}_0$. La demi-sphère est en contact ponctuel en I avec le plan $P = O_0x_0y_0$. La liaison de Σ en T est une liaison sphérique (rotoïde) parfaite et celle en I est sans frottement. De plus, un dispositif D (non représenté sur la figure), de masse négligeable, monté entre l'axe $\vec{z}_0$ et le solide Σ, exerce sur Σ un effort dont le torseur est donné par

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma\vec{z} \end{pmatrix}_T$$

où Γ est une constante.



1. Montrer qu'au cours du mouvement, l'angle θ entre l'axe $\vec{z}_0$ et $\vec{z}$ est constant.

2. Soient G_s, G_c et G respectivement les centres d'inertie de la demi-sphère, du cône et du solide Σ. On donne $\overline{CG}_c = \frac{1}{4}h$, $\overline{CG}_s = \frac{3}{8}a$ et on note la distance entre G et T par $l = \overline{GT}$. Exprimer l en fonction de m_c, m_s, a et h.

3. Exprimer le vecteur de rotation $\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_0)$ de Σ par rapport à $\mathcal{R}_0$ et calculer la vitesse du centre d'inertie G de Σ dans ses mouvements par rapport à $\mathcal{R}_0$. On les exprimera dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

4. Calculer le tenseur d'inertie du cône en C. En déduire le tenseur d'inertie du cône en T. Expliquer (sans calcul) que le tenseur d'inertie de Σ en T dans $(T; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ peut être écirt sous la forme suivante:

$$I(T, \Sigma) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{T\vec{u}\vec{v}\vec{z}} \tag{1}$$

5. Déterminer le moment cinétique de Σ en T.

6. Calculer l'énergie cinétique de Σ,

7. Faire un bilan des efforts appliqués à Σ.

8. Calculer le moment résultant de tous les efforts appliqués à Σ. En appliquant le théorème du moment cinétique à Σ, trouver les deux équations différentielles satisfaites par les trois angles d'Euler et leurs dérivées, indépendantes des inconnus de forces, qui décrivent le mouvement de Σ par rapprt à $\mathcal{R}_0$.

9. Calculer les puissances de tous les efforts appliqués à Σ et en déduire les forces généralisées correspondant aux variables indépendantes du système Σ.

10. Par l'application des équations de Lagrange, retrouver les équations différentielles du mouvement de Σ et vérifier si les résultats sont cohérents avec les équations différentielles trouvées précédemment.

11. On suppose maintenant que la liaison en I est roulement sans glissement, reprendre les questions 6, 9, 10 et trouver l'équation différentielle du mouvement de Σ.

12* (*option*) Peut-on traiter le mouvement sans glissement en I par le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe? Dans l'affirmative, exprimer le tenseur d'inertie en I et retrouver l'équation différentielle décrivant le mouvement.

Corrigé type
Examen du 10 mai 2016

Mécanique générale

1. On sait que $\overrightarrow{O_0T} \cdot \vec{z}_0 = (\overrightarrow{O_0I} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CT}) \cdot \vec{z}_0 = 0 + a + h\cos\theta = H$.
   Le point T étant fixe, H est constant, donc $\theta = \cos^{-1}\frac{H-a}{h}$ est constant.

2. Par la définition du centre d'éinertie, on a
$$(m_c + m_s)\overrightarrow{CG} = m_c\overrightarrow{CG}_c + m_s\overrightarrow{CG}_s$$
   c-à-d: $(m_c + m_s)(h - l) = m_c\frac{1}{4}h - m_s\frac{3}{8}a$, donc
$$l = h - \frac{2m_ch - 3m_sa}{8(m_c + m_s)}$$

3. Le vecteur rotation de Σ ($\dot{\theta} = 0$):
$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{z} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{z}$$
   La vitesse de G ($\overrightarrow{TG} = -l\vec{z}$):
$$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(T/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{TG} = 0 - l\dot{\psi}\sin\theta\vec{u}$$

4. Tz est un axe de symétrie, le tenseur d'inertie en C dans $\mathcal{R}$ est diagonal avec $I_{Ox} = I_{Oy}$ et $I_{Ox} + I_{Oy} = \int(x^2 + y^2 + 2z^2)dm = I_{Oz} + 2\int z^2dm$. On calcule
$$I_{Oz} = \int(x^2 + y^2)dm = \rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{h(1-r/a)} r^2rdzd\phi dr = \frac{\rho}{10}\pi ha^4 = \frac{3}{10}ma^2$$
$$\int z^2dm = \rho\int_0^h z^2\pi r^2dz = \rho\pi a^2\int_0^h z^2(1 - z/h)^2dz = \frac{\rho}{30}\pi ha^2h^3 = \frac{1}{10}mh^2$$
   On en déduit : $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{20}m(2h^2 + 3a^2)$. On conclut donc
$$\mathcal{T}(C, c) = \frac{m}{20}\begin{pmatrix} 2h^2 + 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 + 3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a^2 \end{pmatrix}_{C,xyz}$$
   Par le théorème de Koenig, on a
$$\begin{aligned}\mathcal{T}(T, c) &= \mathcal{T}(C, c) + \mathcal{T}(T, G(m)) - \mathcal{T}(C, G(m)) \\ &= \frac{m}{20}\begin{pmatrix} 12h^2 + 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12h^2 + 3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a^2 \end{pmatrix}_{T,xyz}\end{aligned}$$
   Gz est un axe de symétrie, donc Gz ainsi que les axes perpendiculaires à Gz sont des axes principaux. Par conséquent, le tenseur d'inertie est diagonal. De plus la symétrie de révolution permet d'écrire $I_{Gx} = I_{Gy}$, on conclure que le tenseur d'inertie du culbuto s'écrit sous la forme donnée.

5. Le moment cinétique du système Σ en T:
$$\vec{\sigma}(\Sigma, T) = \mathcal{T}(\Sigma, T) \cdot \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_0) = A\dot{\psi}\sin\theta\vec{v} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{z}$$

6. L'énergie cinétique :
$$2T(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} = A\dot{\psi}^2\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})^2$$

7. Bilan des effeorts appliqués à Σ:
   - Torseur de la pesanteur de Σ en G: $\mathcal{T}(\vec{g}/\Sigma, G) = \begin{pmatrix} -(m_c + m_s)g\vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$
   - Torseur de la réaction en I: $\mathcal{T}(\vec{R}_I/\Sigma, I) = \begin{pmatrix} R_z\vec{z}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_I$
   - Torseur de la réaction en T: $\mathcal{T}(\vec{R}_T/\Sigma, T) = \begin{pmatrix} \vec{R}_T \\ 0 \end{pmatrix}_T$
   - Effort du dispositif en T: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma\vec{z} \end{pmatrix}_A$

8. Le moment en T de tous les efforts:
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\Sigma, A) = [-lg(m_c + m_s)\sin\theta + R_z h\sin\theta]\,\vec{u} + \Gamma\vec{z}$$
Sachant $\dot{\vec{v}} = -\dot{\psi}\cos\theta\vec{u}$ et $\dot{\vec{z}} = \dot{\psi}\sin\theta\vec{u}$, on a
$$\left.\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = A\ddot{\psi}\sin\theta\vec{v} + C(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\phi})\vec{z} + (...)\vec{u}$$
En appliquant le théorème du moment cinétique on obtient:
$$A\ddot{\psi}\sin\theta = 0 \tag{2}$$
$$C(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\phi}) = \Gamma \tag{3}$$

9. Les puissances virtuelles:
- Les puissance virtuelles de la pesanteur et des réactions en I et en T sont nulles.
- La puissance de l'effort du dispositif en A: $\mathcal{P}_M = \vec{\Omega} \cdot \Gamma\vec{z} = \Gamma(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})$.

   Les forces généralisées:
- $Q_\psi = \Gamma\cos\theta$,
- $Q_\phi = \Gamma$.

10. Les équations de Lagrange:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$
$$\mathcal{L}_\psi \;:\; A\ddot{\psi}\sin^2\theta + C(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\phi})\cos\theta = \Gamma\cos\theta,$$
$$\mathcal{L}_\phi \;:\; C(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\phi}) = \Gamma$$
L'équation $\mathcal{L}_\phi$ est identique à éq. (3). En introdusant $\mathcal{L}_\phi$ dans $\mathcal{L}_\psi$ on retrouve éq. (2). Les résultats sont cohérents.

11. La vitesse de glissement en I:

$$\begin{aligned}\vec{V}(I \in \Sigma/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(T/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{TI} \\ &= [\dot{\psi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{z}] \wedge [-a\sin\theta\vec{v} - (h + a\cos\theta)\vec{z}] \\ &= [a\dot{\phi} - h\dot{\psi}]\sin\theta\vec{u}\end{aligned}$$

La liaison en I est sans glissement: $a\dot{\phi} = h\dot{\psi}$.

L'expression de l'énergie cinétique et la puissance totale restent inchangée. Il suffit d'introduire la relation trouvée ici dans les expressions ci-dessus on trouve finalement une équation différentielle car le degrée de liberté du système est réduit à un.

L'énergie cinétique:

$$2T = \left[A\sin^2\theta + C\left(\cos\theta + \frac{h}{a}\right)^2\right]\dot{\psi}^2$$

L'équation de Lagrange:

$$\left[A\sin^2\theta + C\left(\cos\theta + \frac{h}{a}\right)^2\right]\ddot{\psi} = \Gamma\left(\cos\theta + \frac{h}{a}\right)$$

12. Oui. On applique le téorème de Koenig pour trouver le tenseur d'inertie en I qui n'est plus diagonal.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(I,\Sigma) &= \mathcal{T}(T,\Sigma) + \mathcal{T}(I, G(m)) - \mathcal{T}(T, G(m)) \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{Txyz} + \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & -I_{23} \\ 0 & -I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}_{Ixyz} - \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{Txyz}\end{aligned}$$

Le moment cinétique :

$$\sigma_y = (A + I_{22} + T_{22})\Omega_v - I_{23}\Omega_z$$

$$\sigma_z = -I_{23}\Omega_v + (C + I_{33})\Omega_z = -ma\sin\theta(h - l + a\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta + (C + ma^2\sin^2\theta)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})$$